第 31 卷 第 9 期　　财经研究　　Vol. 31 No. 9
2005 年 9 月　　Journal of Finance and Economics　　Sep. 2005

# 不完全市场、惩罚函数及一般均衡

李俊青[1]，杨玲玲[2]

（1. 南开大学 虚拟经济与管理研究中心，天津 300071；
2. 天津大学 理学院，天津 300072）

**摘　要**：不完全市场一般均衡分析框架使我们更加了解现实金融市场中资产价格的形成机制，使用带有惩罚函数的同伦跟踪算法计算不完全市场经济一般均衡模型均衡(GEI)，有效地克服了由于市场不完全引起的消费者资产组合无限扩张和需求函数不连续等传统 GEI 模型计算所固有的困难。

**关键词**：不完全市场；惩罚函数；一般均衡

**中图分类号**：F830.9　**文献标识码**：A　**文章编号**：1001-9952(2005)09-0027-12

## 一、不完全市场的一般经济均衡理论

1954 年 Arrow 和 Debreu 的论文（A－D 模型）"竞争性经济的均衡存在性"提出了 Walras 均衡理论的一般模型。这个"私有制度经济"的模型至今仍是一般竞争均衡分析的经典文献。该文主要有两个结论性定理：第一定理指出，如果个人一开始就拥有数量为正的每种商品出售，那么就存在一个竞争性均衡；第二定理指出，如果存在几种劳动①，则存在竞争性均衡(K. J. Arrow 和 G. Debreu，1954)。此后许多研究者对 A－D 模型进行了扩展，这些扩展包括非正的价格、用更弱的偏好关系代替消费者需求函数、个体的测度空间、无穷维的商品空间、垄断竞争、公共产品、收入分配、无形商品、交易费用、货币、非标准应用等，并且这种扩展还在增加。其中最重要的是 Arrow 将不确定引入一般均衡分析②。Arrow 将商品的定义要素增加了一个不确定的外生事件③（该事件是否发生只有在交付期到时才可以确定），商品的交付取决于该事件是否发生，这样使我们可以将确定性条件下的经济一般均衡的结论直接移植到不确定性经济学中，它们具有等同的形式(Debreu，1953)。如果市场是完全的，即普通证券的种类④与市场状态的数目一样多，此时经济每种商品和资

**收稿日期**：2005-06-06

**作者简介**：李俊青(1972－)，男，河北秦皇岛人，南开大学虚拟经济与管理研究中心博士后流动站研究人员；

杨玲玲(1977－)，女，江苏南通人，天津大学理学院讲师，南开大学经济学院博士生。

产都有一个市场和价格可供交易,消费者可以就任何时间、任何状态下的或有消费,按照一定的交换比例或者贸易条件相互进行交换[5]直至各种商品和资产的消费均衡点[6],这种交换可以增加消费者终身的福利。在这种完全的金融市场中,每一种竞争均衡都具有帕累托效率。

然而现在大多数学者认为市场是不完全的,也就是说消费者不可能对未来各种可能性进行风险对冲[7]。Geanakoplos 认为至少有三个原因使市场上一些资产不存在:(1)不对称信息和道德风险;(2)交易成本;(3)对某些消费者的市场准入限制。由于不对称信息的存在,使得某些消费者不愿意参与到其他消费者比自己更加拥有信息优势的市场中来。一些市场交易成本太大使得某些消费者认为在这种市场中交易将不可能获得弥补交易费用的收益,从而使这些消费者不愿意交易某些资产,此外,即使一些资产存在,但是一些消费者被人为限制在这些资产市场之外。这些都导致了不完全市场的存在。

不完全市场的一般均衡(General equilibriumwith incomplete financial markets(GEI)模型是 A—D 模型的扩展[8]。其主要研究在某些金融产品市场缺失的情况下,金融资产和商品的价格是如何在完全竞争的金融市场和商品市场的相互作用下决定的,以及由此而决定的价格(商品和金融资产的价格)对经济行为者的消费、生产和投资最优决策的影响。GEI 分析使我们对市场经济行为有了更加深入的了解。它为我们提供了许多在传统的完全市场下 A—D 模型无法解释的现象,如:在不完全的市场中,充分竞争的市场并非有效;金融工具和货币显著影响不完全市场的均衡配置。Geanakoplos(1990)、Magil 和 Shafer(1991)讨论了许多市场不完全带来的后果,如典型代理人和单一商品模型的限制,公司目标的冲突[9],金融资产和实物资产的重要区别等。

GEI 模型的分析框架是非常吸引人的,但是 GEI 研究对数学较高的要求使其未得到广泛的重视。本文提出 GEI 分析方法,其目的就在于试图通过一个可计算 GEI 均衡的分析方法建立起 GEI 理论和它的应用之间的联系。这种 GEI 均衡算法将提供一种有效而简洁的 GEI 均衡预测方法,这种方法将能很好地计算均衡价格、市场行为和福利的分配。这种可计算的分析框架将为我们分析诸如税收、关税政策提供关键的分析工具。

## 二、GEI 模型

基本的 GEI 模型为带有不确定性的两时期(T=0,1)模型,0 时期所有的消费者($i=1,2,\cdots\cdots,I,I<\infty$)在确定性环境下交换($S=0$),但是,所有的消费者不知道在 1 时刻究竟 $S(s=1,2,\cdots\cdots,S,S<\infty)$种状态中的哪一个发生。在每一种状态中有 L 种商品($L<\infty$)。每一种商品在每一种状态中存在一个现货市场。所有商品现货价格向量为:

$p=(p_0,p_1,p_2,\cdots\cdots,p_s)\in V_{++}^{M-1}\equiv\{p\in\mathscr{R}_{++}^{M}\}$,$M=L(S+1)$,$V_{++}^{M-1}$为价格单形[10]。

每一个消费者 i 的消费束表示为 $x^i=(x_0^i,x_1^i,x_2^i,\cdots\cdots,x_s^i)^T\in\mathscr{R}_{++}^{M}$,其中 $x_s^i\in\mathscr{R}_{+}^{L}$ 表示消费者 i 在状态 s 下的消费束。每个消费者 i 可以用记为 $\omega^i=(\omega_0^i,\omega_1^i,\omega_2^i,\cdots\cdots,\omega_s^i)^T\in\mathscr{R}_{++}^{M}$ 的资源禀赋和偏好刻画,每个消费者拥有满足一定条件的效用函数 $u^i:\mathscr{R}_{++}^{M}\rightarrow\mathscr{R}$。由于消费者在各个状态之间的预算约束被状态分离,所以,为了使消费者能够在状态之间转移收入,消费者需要拥有各种资产。假设在经济中拥有有限 N 个实物资产[11],其价格为 $q=(q_1,q_2,\cdots\cdots,q_N)\in\mathscr{R}^{N}$。资产 j 在 1 时刻各种状态下的或有状态收益矩阵为[12]:$A_j=(a_1^j,a_2^j,\cdots\cdots,a_s^j)^T\in\mathscr{R}_{++}^{SL}$,$j=1,2,\cdots\cdots,N$;$s=1,2,\cdots\cdots,S$,其中 $a_s^j\in\mathscr{R}^{L}$ 是状态 s 下的可获商品束。所以,所有资产的支付矩阵可以表示为 $A=(A_1,A_2,\cdots\cdots,A_N)\in\mathscr{R}^{SL\times N}$[13]。定义如下矩阵:

$$Q=\begin{bmatrix} 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M & & & & O & M \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p_s \end{bmatrix}\in\mathscr{R}^{S\times N}$$

记 Q 矩阵中去掉第一列向量的矩阵为 $Q_{-L}$,所以向量 $Q_{-L}A_j=(p_1a_1^j,p_2a_2^j,\cdots\cdots,p_sa_s^j)^T\in\mathscr{R}^{S}$ 表示资产 j 的名义状态支付[14],定义所有资产的名义状态支付矩阵为:$R(p)=Q_{-L}A\in\mathscr{R}^{S\times N}$,所以资产 j 在状态 s 时根据现货价格 $p_s$ 计算得到的名义支付表示为$(R(p))_{s,j}$。所以在 1 时刻,资产组合 $\theta\in\mathscr{R}^{N}$ 的名义回报为 $R(p)\theta$,在 0 时刻该资产组合的市场价格为 $q\theta$。我们约定,梯度向量 $Du^i(x)$和价格向量 p 和 q 为行向量,其他向量如不特别说明为列向量。表示 $(u,\omega)=((u^i)_{i=1,2,\cdots\cdots,I},(\omega^i)_{i=1,2,\cdots\cdots,I})$则由 I 个消费者和资产或有支付矩阵表示的经济体为$(E)\equiv(E(u,\omega),A)$。如果 $Rank[R(p)]=S$,则我们称经济(E)为完全的,此时每一个消费者可以在两个时间之间(0 和 1 时刻)以及 1 时刻不同状态之间转移财富,也就是说,每一个消费者可以通过资产买卖对冲 1 时刻的所有或有状态[15]。如果 $Rank[R(p)]<S$,我们称市场(E)是不完全的,此时消费者无法在某些状态之间进行财富转移,从而影响消费者最优的效用。

问题描述为:给定商品的现货价格 $p\in V_{++}^{M-1}$ 和资产的价格 $q\in\mathscr{R}^{N}$,每个消费者根据最大化效用 $U_i(p,q)$选择他的状态消费束,即:

$$\max_{x,\theta}u^i(x)$$
$$\text{s.t.:}\ \begin{array}{l} p_0(x_0^i-\omega_0^i)\leqslant -q\theta^i \\ Q(x^i-\omega^i)\leqslant R(p)\theta^i \end{array}$$

第一个约束为0时刻的消费约束,第二组约束是1时刻每个状态下的消费约束。定义一个市场均衡为满足下面条件的两组状态价格$(\bar{p},\bar{q})$和消费者选择$(\bar{x}^i,\bar{\theta}^i)_{i=1,2,\cdots\cdots,I}$。

(1)$(\bar{x}^i,\bar{\theta}^i)$是满足效用函数$U^i(\bar{p},\bar{q})$, $i=1,2,\cdots\cdots,I$最大化的解;

(2)$\sum_{i=1}^{I}\bar{x}^i=\sum_{i=1}^{I}\omega^i$,或有商品状态出清;

(3)$\sum_{i=1}^{I}\bar{\theta}^i=0$,资产市场出清。

由于问题$U^i(p,q)$均衡解必须满足资产价格q向量不存在套利,所以需要将资产价格满足无套利的条件考虑在均衡的定义中。Cass(1984)第一次把上面的市场均衡定义等价于下面的定义:

定义:市场(E)均衡是指存在个体选择$\bar{x}^i,\bar{\theta}^i)_{i=1,2,\cdots\cdots,I}$满足下面的条件:

(1)$\bar{x}^1(\bar{p})=\arg[\max_{x\gg 0}u^1(x)\ s.t.\ \bar{p}(x-\omega^1)=0]$;

(2)$\bar{x}^i(\bar{p})=\arg[\max_{x\gg 0}u^i(x)\ s.t.\ \bar{p}(x-\omega^1)=0, Q(x-\omega^1)=R(\bar{p})\bar{\theta}^i]$, $i=2,\cdots\cdots,I$;

(3)$\sum_{i=1}^{I}\bar{x}^i(\bar{p})=\sum_{i=1}^{I}\omega^i$。

即,第一个消费者(以下记为U类消费者)只有一个单一的约束,它不受可获资产市场的约束。而其他消费者(以下记为C类消费者)受到两个预算约束影响。如果$\mathrm{Rank}[R(p)]<N$,需求函数$x^i$通常为不连续的,这种不连续性将导致经济(E)没有均衡解。Hart(1975)给出了第一个这种经济存在的例证。所以,我们定义满足$\mathrm{Rank}(R(p))=N$的价格体系p为好的价格体系,满足$\mathrm{Rank}(R(\mathring{p}))<N$的价格体系$\mathring{p}$为差的价格体系。

## 三、惩罚函数与同伦算法

C类消费者的效用最大化问题可以表述如下:

$$\max_{x,\theta}u^i(x)$$
$$\text{s.t.}:\begin{cases}p_0(x_0-\omega_0^i)=0,\\ Q(x-\omega^i)=R(p)\theta.\end{cases}$$

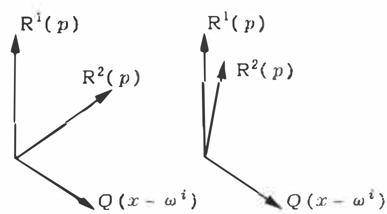
不完全市场经济中消费者需求函数的不连续性可以通过例证说明。如在经济(E)中$S=3$,$N=2$,两个资产的回报向量写成$R(p)=(R^1(p),R^2(p))$,$R^i(p)\in R^3$。由于在目标函数中没有组合向量$\theta$,所以第二个约束可以写成:

$$Q(x-\omega^i)\leqslant[R(p)] \qquad (1)$$

其中,$[R(p)]$是资产回报矩阵R(p)的扩展向量空间,也称为市场扩展空间。

所以约束(1)可以理解为任意消费向量x的仿射变换$Q(x-\omega^i)$都位于资产回报矩阵的扩展向量空间$\langle R(p)\rangle$中[16]。如图1—a所示。此时我们对R(p)中的两个资产回报向量的几何位置没有要求[17]。如果由于商品价格向量p的

改变,使得 $R^1(p)$ 和 $R^2(p)$ 变得越来越近[18],只要二者没有完全在一条直线上(线性相关),则 $R(p)$ 就可以扩展成为整个二维平面,只是随着 $R^1(p)$ 和 $R^2(p)$ 越来越接近,$\theta$ 连续变化得越来越大而已,参见图 1—b。但是,如果 $R^1(p)$ 和 $R^2(p)$ 突然完全线性相关[19]而成为 $R^1(\mathring{p})$ 和 $R^2(\mathring{p})$,则 $R(p)$ 只能扩展成 1 维线性空间了(参见图 1—c),此时,消费者的消费束将被突然限制在一个非常小的一维空间中变化,这使得消费者迅速改变他的消费束,从而使需求函数表现出非连续性,同时消费者的资产组合 $\theta$ 将急剧膨胀[20]。所以,可以看出,随着 p 的变化,需求函数是非连续变化的。这一点使我们在计算经济均衡时非常困难,也使我们建立在连续基础上的牛顿微积分和同伦方法无法使用。



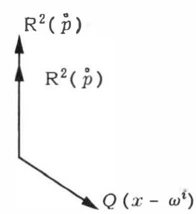




**图 1—a,图 1—b"好的价格"体系:**
**Rank[R(p)]=N=2**

**图 1—c "坏的价格"体系:**
**Rank[R(p)]=1<N**

(一)惩罚函数

考虑引入惩罚函数的 C 类消费者效用最大化问题。对于给定的 $p\in V_{++}^{M-1}$ 和 $t\in[0,1]$,考虑问题[记为问题 $p_i(p,t)$]:

$$\max_{x,\theta} u^i(x)-\frac{1}{2}(1-t)\|\theta\|^2$$

$$\text{s. t. :}\begin{aligned}&p(x-\omega^i)=0,\\&Q(x-\omega^i)=R(p)\theta.\end{aligned}$$

其中,基于资产交易的惩罚函数为 $\frac{1}{2}(1-t)\|\theta\|^2$,t 为同伦参数。只有在 $t<1$ 的时候,消费者 i 才受到惩罚函数的"惩罚",此时,惩罚函数会对资产交易有一个限制,可使消费者避免无限制地扩张他的资产组合。当 $t=1$ 时,问题 $P_i(p,t)$ 又还原为原先的效用最大化问题。

我们看到,当变量 p 的变化使 $R^1(p)$ 和 $R^2(p)$ 越来越接近时,由于惩罚函数中的资产组合影响消费者的效用,此时的消费者不再是选择使 $Q(x-\omega^i)$ 位于 $R(p)$ 扩展成的整个空间上最优化的 x[21],特别,当 p 接近"坏的"价格体系时,消费者不再无限制地扩张他的资产组合 $\theta$,而是保持有界的资产组合,同时使 $Q(x-\omega^i)$ 达到 $\langle R(\mathring{p})\rangle$,这时 x 的变化就变得连续了[22]。所以,此算法的思想是:通过在目标函数中加入同伦参数为 $t\in[0,1]$ 的惩罚算子,使消费者

的需求函数在 $t<1$ 时连续。这使我们可以在整个价格单形上使用标准的同伦算法,此外,从 $t=0$ 开始慢慢增加至 $t=1$,也就使我们的优化问题慢慢转化为原先的优化问题,这样随着 t 无限的接近 1 时,问题 $P_i(p,t)$ 的均衡解也就慢慢地充分接近原先问题的均衡解。

(二)同伦算法

1. 基于一阶条件的路径跟踪算法

解决 GEI 经济均衡第一步是建立决定均衡的方程组,传统的方式是建立超额需求函数 Z,使得 $Z(p)=0$,从而获得均衡价格,Brown(1996b)、Demarzo 和 Eaves(1996)使用的就是这种方法。但是,与完全市场的 A—D 模型不同,在 GEI 中人们不能获得个体的需求函数的闭形解[23]。在已经存在的两个计算例证中,Brown(1996b)、Demarzo 和 Eaves(1996)使用了非常特殊的效用函数[24]以保证能够求解出个体需求函数的闭形解。

通过计算消费者效用最大化问题的一阶条件[25]我们可以避免计算个体的需求函数数值。这时均衡问题被描述为一组满足一阶条件[26]、市场出清条件和价格归一化条件的方程组。如:

U 类消费者的一阶条件为:

$$Du^u(x^u)-\lambda^u p=0 \tag{2}$$

$$p(x-\omega^u)=0 \tag{3}$$

C 类消费者的一阶条件为:

$$Du^i(x^i)-\lambda^i p-\mu^i Q=0 \tag{4}$$

$$-(1-t)(\theta^i)^T+\mu^i R(p)=0 \tag{5}$$

$$p(x^i-\omega^i)=0 \tag{6}$$

$$Q(x^i-\omega^i)-R(p)\theta^i=0 \tag{7}$$

商品市场出清条件:

$$(x_{sl}^u-\omega_{sl}^u)+t\sum_{i\in C}(x_{sl}^u-\omega_{sl}^u)=0 \tag{8}$$

商品价格归一化条件(价格单性条件):

$$\sum_{sl}(p_{sl}-1)=0 \tag{9}$$

所以,方程组(2)~方程组(9)和 $t=1$ 提供了 GEI 经济的均衡解。对于给定的资源禀赋 $\omega^u\in\mathcal{R}_{++}^M$[27],我们可以将方程组(2)~方程组(9)所有左侧函数表示为下面形式的同伦函数[28] $H_{\omega^u}$:

$$H_{\omega^u}(x^u,\lambda^u,(x^i,\theta^i,\lambda^i,\mu^i)_{i\in C},p,t)=0$$

下面同伦函数的解为 GEI 经济的均衡解:

$$E_{\omega^u}(x^u,\lambda^u,(x^i,\theta^i,\lambda^i,\mu^i)_{i\in C},p)\equiv H_{\varepsilon^u}(g1)=0$$

这个方程组系统有方程 $M+1+(M+N+1+S)(H-1)+(M-1)$。

定义 $p=\{p\in\mathcal{R}_{++}^M:\text{rank } R(p)=N\}$,$D=\mathcal{R}_{++}^M\times\mathcal{R}\times(\mathcal{R}_{--}^M\times\mathcal{R}^N\times\mathcal{R}\times$

$\mathscr{R}^S)^{H-1}$，则 $H_{\omega^u}$[29]的定义域为：$D\times[(\mathscr{R}^M_{++}\times[0,1))\cup(P\times[0,1))]$

其中：$(x^u,\lambda^u,(x^i,\theta^i,\lambda^i,\mu^i)_{i\in C})\in D,(p,t)\in[(\mathscr{R}^M_{++}\times[0,1)]\cup(P\times[0,1])]$[30]

下面的命题[31]保证上面的算法可以找到 GEI 经济的均衡点。

命题 1：如果 $t\to1,p\to\bar{p}$ 和 Rank $R(p)=N$，则 $(\theta^i)_{i\in C}$ 保证在同伦路径上一致有界，所以该算法最终趋近于 $(\bar{x}^u,\bar{\lambda}^u,(\bar{x}^i,\bar{\theta}^i,\bar{\lambda}^i,\bar{\mu}^i)_{i\in C},\bar{p}^u)$。

2. 一个同伦函数的修改

为了简化上述同伦算法的计算，将上述的最优化问题变化为如下的问题；

$$\max_{x,\theta}tu^i(x)-\frac{1}{2}(1-t)\parallel x-\omega^i\parallel^2-\frac{1}{2}(1-t)\parallel\theta\parallel^2$$

$$\text{s. t. :}\begin{array}{l}p(x-\omega^i)=0,\\Q(x-\omega^i)=R(p)\theta.\end{array}$$

新的规划问题还是一个凸规划问题，当 $t=1$ 时还是原先的消费者效用最大化问题。不同的是上面一阶条件的方程(4)改写为：$tDu^i(x^i)-(1-t)(x^i-\omega^i)-\lambda^ip-\mu^iQ=0$，方程(8)改写为更加简单的 $(x^u_{sl}-\omega^u_{sl})+\sum_{i\in C}(x^u_{sl}-\omega^u_{sl})=0$。

这种变化最大的好处是使我们寻找同伦路径的起始点变得简单。通过 U 类消费者的一阶条件决定了的商品价格体系 $p^u$ 后，不再需要解 C 类消费者一阶条件以获得初始的 $(x^i,\theta^i,\lambda^i,\mu^i)_{i\in C}$。即同伦算法的初始点可以通过(10)式给出，所有原先同伦函数保持的性质在新的同伦函数中依然保持，我们的计算是根据新同伦函数进行的：

$$[x^u,\lambda^u,(x^i,\theta^i,\lambda^i,\mu^i)_{i\in C},p,t]=[x^u,\lambda^u,(x^i,0,0,0)_{i\in C},p,0]\qquad(10)$$

## 四、数值计算

使用 HOMPACK 软件包[32]，我们对下面两种情况进行了计算：

情况 1[DeMarzo 和 Eaves(1996)]

GEI 经济中消费者 $I=3(U,1,2)$，1 时刻世界状态 $S=3$，资产 $N=2$，商品数 $L=2$，C 类消费者 1、消费者 2 具有相同的初始禀赋和效用函数：

$$\omega^c=(10,10;25,20;20,20;15,20)^T$$

$$u^c(x)=-\sum_{s=0}^{3}\pi_s(B-(x_{s1})^\alpha(x_{s2})^{1-\alpha})^2$$

其中：$B=57,\pi=(1,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}),\alpha=\frac{3}{4}$。

U 类消费者的初始禀赋和效用函数：

$$\omega^u=(20,20;5,10;10,10;15,10)^T$$

$$u^u(x)=-\sum_{s=0}^{3}\pi_s(B-(x_{s1})^\beta(x_{s2})^{1-\beta})^2$$

其中，$\beta=\frac{1}{4}$。

资产支付矩阵 $A^T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1\end{bmatrix}$

这里的效用函数不满足 GEI 模型对效用函数严格单调性和有界性的假设。使用上面的算法计算该市场均衡，由于两个 C 类消费者完全相同，所以整个方程组共 31 个方程和 32 个未知数。对 U 类消费者的一阶条件求解可以确定初始点的商品状态价格为：

$$p^u\approx(0.10854,0.32561;0.079907,0.11986;0.045957,0.13787;0.033137,0.14912)$$

同时，可得初始 $\lambda^u\approx170.45$，其他初始点为 $x^u=\omega^u,x^c=\omega^c,\theta^c=0,\lambda^c=0,\mu^c=0$，使用上述同伦算法，可得：

$$p\approx(0.30239,0.22111;0.10096,0.07041;0.09662,0.06771;0.08005,0.06125)$$[34]

相应的消费均衡配置为：

$$x^u\approx(5.9643,24.4789;6.2020,26.6775;6.7732,29.2549;8.7209,34.1946)^T$$
$$x^c\approx17.0178,7.7605;24.3990,11.6612;21.6143,10.3725;18.1395,7.9027)^T$$

消费者 1、消费者 2 的资产组合为：

$$c\approx(-0.63405,-4.43950)^T$$

均衡价格的资产回报为；

$$R(p)=\begin{bmatrix}0.10096 & 0.13151\\ 0.09662 & 0.09662\\ 0.08005 & 0.09885\end{bmatrix}$$

资产在 0 时刻的价格为：

$$q\approx(0.27763,0.32698)$$

可以看出，C 类消费者 1、消费者 2 在 0 时刻的资源禀赋比较少，但是他们在 0 时刻消费的商品相对于他们在各期的资源禀赋而言比 1 时刻各个状态消费的商品多。因此，他们从 1 时刻将财富转移到 0 时刻。而 U 类消费者却表现得正好相反，他们在 0 时刻拥有相对较多的资源禀赋，同时他们在 1 时刻的第一种状态 $s=1$ 拥有相对最少的资源禀赋(同时他们在 1 时刻的第 3 种状态 $s=3$ 拥有相对最多的资源禀赋)，结果 U 类消费者将财富从 0 时刻转移到 1 时刻以对冲 $s=1$ 时出现的风险。所以我们能够看到 C 类消费者 1、消费者 2 卖空了两种资产 $\theta_1^c,\theta_1^c\leqslant0$，同时 U 类消费者买入两种资产。C 类消费者 1、消费者 2 从 1 时刻转移了 $|q_1\theta_1+q_2\theta_2|=1.62766$ 的财富到 0 时刻。U 类消费者在 0 时期花了 2.35532 财富购买所有的资产，他资产组合在 1 期的回报为 $R(p)(-2\theta^c)=(1.29570,0.98041,0.97920)^T$，其中在最坏的状态[35] $s=1$ 时回报最高。

情况 2

对例证1中的情况略加变化,U类消费者的资源禀赋为 $\omega^{u}=(20,20;8,24;10,30;6,18)^{T}$

此时,初始商品的或有状态价格为:

$$p^{u}\approx(0.11394,0.34183;0.090705,0.090705;0.080037,0.080037;0.10137,0.10137)$$

资产回报矩阵为:

$$R(p)=\begin{bmatrix}0.090705 & 0.090705\\ 0.080037 & 0.080037\\ 0.10137 & 0.10137\end{bmatrix}$$

由于 $\mathrm{rank}R(P)=1<N=2$,初始的价格向量为“坏价格体系”,传统的没有惩罚算子的同伦算法在此时将无法计算,但是本文描述的算法将搜索出如下均衡点:

$$p\approx(0.30197,0.23329;0.08974,0.05871;0.09640,0.05199;0.11044,0.05747)$$

$$x^{u}\approx(6.5885,25.5843;8.4517,38.7553;7.9068,43.9831;6.8188,39.3086)^{T}$$

$$x^{c}\approx(16.7057,7.2079;24.7741,12.6224;21.0466,13.00884;14.5906,9.3457)^{T}$$

$$\theta^{c}\approx(4.0107,-6.7347)^{T}$$

## 五、小　结

不完全市场经济均衡使我们能够更加深刻和透彻地观察、分析现实商品和金融资产市场对消费者消费和投资的影响。使用带有惩罚函数的一般均衡分析框架,构建了一种 GEI 经济均衡计算的分析模式。由于惩罚函数的介入,使得我们在使用同伦跟踪算法计算 GEI 模型均衡时克服了由于市场不完全带来的消费者资产组合无限扩张和需求函数不连续带来的 GEI 模型计算的困难。通过两个例证我们看到了这种计算方法的有效性。

**注释:**

①这几种劳动具有两种性质:(1)每个个人至少可以提供数量为正的其中一种类型的劳动;(2)这些类型的劳动都对某些商品的生产起到某种促成作用。

②K. J. Arrow 在 1952 年 5 月提交给 CNRS 上的论文首次提出了不确定性下的均衡分析。

③其他商品的要素为商品的物理特性、交付的时间和地点。

④指相互之间或有状态收益独立的普通证券种类。

⑤在一般均衡的市场上将不会产生任何套利的机会,也就是说,无套利是一般均衡的必要条件。

⑥完全市场的均衡存在性问题较为容易证明,参见邵宇:《微观金融学及其数学基础》,清华大学出版社 2003 年版。

⑦在 Meton 的动态资本资产定价模型中说明消费者/投资者会针对未来的各种可能情况进行对冲,以保证消费者在连续时间下的终身效用最大化。

⑧GEI 模型保留了 A—D 模型的一些基本的经济学假定，例如市场是完全竞争的、消费者追求效用的最大化、信息对称、消费者的预期是理性的、市场出清等。

⑨有关公司所有权和经营权在不完全市场中的冲突问题可以参见 Fisher 定理。

⑩归一化商品相对价格。

⑪以实物商品在未来某种状态发生时交付的资产。

⑫0 时刻资产没有支付。

⑬其第 n 列向量为第 n 种资产的状态支付向量。

⑭以货币表示的支付。

⑮在市场完全的时候，每个消费者可以通过存在的资产市场没有限制地在各个状态和时间之间转移财富以最大化自己的总效用。

⑯此例中的扩展向量空间为二维空间。

⑰只要资产回报向量是非冗余的，则 R(p)是可以扩展出整个二维平面的。

⑱即越来越接近线性相关。

⑲图形上为二者共线。

⑳直至无穷大，即对某些资产的拥有没有了限制，这一点 Hart(1975)已有描述。

㉑而是局部的最优消费束。

㉒有关这方面更加严格的数学说明参见 Schmedders 的证明(1996)。

㉓即使是非常简单的效用函数形式也不能获得，这主要是由于在 GEI 模型中约束数量巨大。

㉔他们的效用函数不满足通常在 GEI 模型中对效用函数的标准假设。

㉕最早的文献见 Judd(1998)，这种思想虽然不是很新，但还是很少被人所了解。

㉖指带有约束的最大化问题的拉格朗日函数的一阶条件。

㉗U 类消费者的资源禀赋。

㉘整个方程组中除了 R(p)和 $\omega^u$ 外都是内生变量。

㉙有关同伦函数 $H_{\omega^u}$ 的性质说明参见 Schmedders(1996)。

㉚第二个集合关系定义了不完全市场和完全市场的所有情况。

㉛命题的证明参见 Schmedders(1996)。

㉜HOMPACK 软件包是基于 DEC 工作站 5000/200，它是使用同伦算法解决非线性方程组的专业软件，相关情况可以参见 http://www.netlib.org/hompack/。

㉝例证来自 DeMarzo 和 Eaves(1996)、Brown(1996b)，由于在该种情况的不完全经济中，从 t=0 时刻路径显示不连续，所以传统的同伦路径跟踪算法不能使用。

㉞计算此价格体系下的名义或有支付矩阵 R(p)，表明此市场为完全市场。

㉟针对资源禀赋而言。

**参考文献：**

[1]Brown D J, DeMarzo P M , Eaves B C. Computing zeroes of sections of vector bundles using homotopies and relocalization [J]. Mathematics of Operations Research, 1996, (21): 26～43.

[2]DeMarzo P M , Eaves B C. Computing equilibria of GEI by relocalization on a Grassmann manifold [J]. Journal of Mathematical Economics, 1996, (26): 479～497.

[3] Garcia C, Zangwill W. Pathways to solutions, fixed points, and equilibria [M]. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1981.

[4] Geanakoplos J. An introduction to general equilibrium with incomplete asset markets [J]. Journal of Mathematical Economics, 1990,(19): 1～38.

[5]Geanakoplos J , Shafer W. Solving systems of simultaneous equations in economics [J]. Journal of Mathematical Economics, 1990,(19):69～94.

[6]Hart O. On the optimality of equilibrium when the market structure is incomplete [J]. Journal of Economic Theory, 1975,(11):418～443.

[7]Hirsch M D, Magill M, Mas-Colell A. A geometric approach to a class of equilibrium existence problems [J]. Journal of Mathematical Economics, 1990,(19):95～106.

[8]Husseini S Y, Lasry J M, Magill M J P. Existence of equilibrium with incomplete markets [J]. Journal of Mathematical Economics,1990,(19): 39～68.

[9]Magill M J P, Shafer W. Characterization of generically complete real asset structures [J]. Journal of Mathematical Economics,1990,(19):167～194.

[10] McManus D. Incomplete markets: Generic existence of equilibrium and optimality properties in an economy with futures markets[M]. Mimeo, University of Pennsylvania, 1984.

[11]Repullo R. On the generic existence of radner equilibria when there are as many securities as states of nature [J]. Economics Letters,1986,(21):101～105.

[12]Schmedders K. Damped asset trading in the general equilibrium model with incomplete asset markets[R]. Technical Report 96-11, Department of Operations Research, Stanford University, 1996.

[13] Watson LT. A globally convergent algorithm for computing fixed points of C2 maps [J]. Applied Mathematical Computation, 1979,(5):297～311.

[14]吉拉德·德布罗. 价值理论及数理经济学的 20 篇论文[M].(杨大勇,腾飞译)北京:首都经济贸易大学出版社,2002.

[15] 邵宇. 微观金融学及其数学基础[M]. 北京:清华大学出版社,2003.

[16] 何穗. 不完全市场一般均衡研究[J]. 华中师范大学学报(自然科学版),2001,(3):250～252.

[17] 武康平,脱天福. 不完全资产市场均衡论[J]. 北方工业大学学报,1996,(8):1～12.

(下转第 79 页)

and market share analysis, this paper analyzes the resource allocaton of 54 sub-industries of machine-building industry in 15 cities in Yangtze River Delta, and finds the unbalanced structure and strong complementarity of these sub-industries. Based on the mentioned above, it offers the concept of industry location belt and the idea of designing 40 machine-building industry location belts in Yangtze River Delta.

**Key words**: industry locaton belt; data envelopment analysis; location quotient analysis

（责任编辑　周一叶）

（上接第 37 页）

# Computing the Equilibria in the General Equilibrium Model with Incomplete Asset Market

LI Jun-qing[1], YANG Ling-ling[2]

(1. *Research Center of Fictitious Economy & Management*, *Nankai University*, *Tianjin* 300071, *China*;
2. *School of Science*, *Tianjin University*, *Tianjin* 300072, *China*)

**Abstract**: GRI model makes it possible for us to study more profoundly the influence of goods and financial market on consumption and investment. This paper sets up a general equilibrium model with a penalty function on the asset markets. These penalties lead to implicit bounds on the optimal asset transactions, eliminating any incentive for agents to inflate their portfolios of assets and ensuring that demand functions are smooth, so hometopy-path-following algorithm can be used. Through two examples, we show the reliability of this method.

**Key words**: incomplete market; general equilibrium; hometopy-path-following algorithm

（责任编辑　周一叶）