第 30 卷 第 6 期
2004 年 6 月

财经研究
Journal of Finance and Economics

Vol. 30 No. 6
Jun. 2004

收益率分形分布下的一种组合投资模型

郑　伟[1], 王建华[2]
(1. 长江证券 博士后流动站, 湖北 武汉 430015;
2. 兰州理工大学 国际经济管理学院, 甘肃 兰州 730050)

摘　要: 文章从资产收益率的分形分布和下方风险的角度构造了一种不相关资产的组合投资模型, 并进行了相应的实例分析。

关键词: 收益率; 分形分布; 组合投资

中图分类号: F224.0; F830.59　**文献标识码**: A　**文章编号**: 1001-9952(2004)06-0014-08

一、引　言

有效市场假说(Efficient Market Hypothesis)是主流的股票市场理论。EMH 假定投资者是理性的、有秩序的和有条理的, 人们是以因果线性的方式对信息做出反应。由于投资者对新信息立刻做出反应, 所有的信息都反映在价格变化之中, 每日的价格行为只同当前的信息有关, 而与以前的价格无关, 因而价格是独立的随机变量。当投资者足够多时, 收益率分布趋于正态分布且方差有限。价格的独立假设和正态分布使得在资本市场的分析中使用概率和微积分得以正当化, 在此基础上发展起来的现代投资理论(包括资本资产定价模型(CAPM)、期权定价模型(Black-Scholes)和套利定价理论(APT))与 IID 假设(独立同分布)和正态分布也是紧密相关的。随机游走及与之相关的收益的正态分布假设是现代资产组合理论(MPT)的决定性理论基础之一, 可以这样说, 没有了价格的随机游走, 有效市场理论和现代资产组合理论也就所剩无几了。主流的金融计量理论基于一种线性思维, 认为市场是静态的、均衡的, 在这种线性思维的指导下, 价格行为的独立性和收益分布的正态性是其必然推论。然而, 如果价格行为是非独立的、非线性的, 那么, 我们就需要重新审视市场的有效性和经典的组合投资问题。

收稿日期: 2004-03-10

作者简介: 郑　伟(1972—), 男, 辽宁抚顺人, 长江证券博士后流动站研究人员;
王建华(1963—), 男, 黑龙江鸭山人, 兰州理工大学国际经济管理学院。

二、资产收益率的分形分布

社会经济现象与自然现象有本质的不同，在自然现象中，很多变量服从正态分布；而在社会经济现象中很多现象服从负幂律分布。它们可以用非正态的分形分布来描述。分形分布也称为稳定分布族。在经济学文献中，分形分布又称为 Pareto 分布、Pareto-Levy 分布或 Stable-Paretian 分布。这些分布的性质最早由 Levy 推导出来，而他的工作又是以 Pareto 有关收入分布的工作为基础的。人们很早就发现，股票收益不是正态分布，相对正态分布来说，有明显的“尖峰”和“胖尾”（概率密度曲线在均值附近有更高的峰度值和过多的尾部观测值）。Mandelbrot 将之称为“稳定帕累托”（Stable Paretain）分布，即分形分布。由于其分布的密度函数难以用显式表达，故用其特征函数表示为[1]：

$$\ln(f(t))=i\delta t-\lambda|t|\cdot[1+i\beta(2/\pi)\cdot\ln|t|] \qquad \alpha=1$$

$$\ln(f(t))=i\delta t-\lambda^{\alpha}|t|^{\alpha}\left[1-i\beta(t/|t|)\cdot\tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right] \qquad \alpha\neq1$$

其中，λ 是尺度调整参数，它表示曲线的宽度，$\lambda>0$；β 是偏斜度的度量，$-1\leqslant\beta\leqslant+1$，$\beta=0$ 时，分布是对称的；δ 是位置参数，表示均值的位置；α 是特征指数，α 既度量分布的尖峰程度又度量分布的胖尾程度，$0<\alpha\leqslant2$。只有当 $\alpha=2$ 时，该分布才等价于正态分布，这时，方差有限且稳定。因此，只有价格是随机游走时，方差才是重要的描述风险的信息。除此之外，方差是无定义的或可能是无穷的，这时，作为风险度量的样本方差是无意义的。当 $\alpha=2$、$\beta=2$ 时，就得到了正态分布的特征函数：$\log(f(t))=i\mu t-(\sigma^2/2)\cdot t^2$。其中，$\mu$ 是正态分布的均值，σ^2 是方差。具有自相似性是分形的一个基本特征，因为稳定帕累托分布关于时间在统计意义上是自相似的，因此该分布是分形。

可见，有效市场假说是说 α 必须等于 2，而分形市场研究认为 α 可以在 1 和 2 之间取值，这一范围内的 α 对应的变量其波动特点是长期记忆性和统计上的自相似性。如果股票收益表现出长期记忆性，那么概率分布就不是正态分布；如果随机游走不适用，那么大部分传统的数量分析工具的合理性将受到置疑，特别是资本资产定价模型和作为易变性和风险度量的标准差的概念。

当 $0<\alpha\leqslant1$ 时，即使稳定的均值也不存在，实证研究表明，α 落在这个范围内是很少见的。

在分形分布中，参数 $\alpha=1/H$，H 是 Hurst 指数，可以通过 R/S 分析得到。H 指数是 Hurst 提出的统计量，Hurst[2]通过对尼罗河水位的几十年的观测，发现水位的变化并不遵循随机游走，即不是独立的增量过程，于是 Hurst 建立了如下的关系：$R/S=(aN)^H$。其中：R/S 为重标极差，R 是样本累积离差的极差，S 是标准差；N 为观测次数；a 为常数；H 为 Hurst 指数。

将上式取对数，就得到：$\mathrm{Log}(R/S)=H\mathrm{Log}(N)+H\mathrm{Log}(a)$。Log(R/S)

—Log(N)直线方程的斜率就是 Hurst 指数 H。这就是 Hurst 提出,后来又经 Mandelbrot 和 Peters 等学者发展完善的 R/S 分析方法(重标极差分析,Rescaled range analysis)的基本思想(R/S 具体算法及检验见文献[2])。

三、收益率分形分布下传统资产组合理论所面临的困境分析

主流的有效市场假说和随机游走理论的一个重要推论是收益服从正态分布,这是理论上完美的投资组合理论得以存在的基础。分形市场理论的研究表明,股票价格表现出长期依存的关系,具有状态持续性,表现为价格的连续涨跌,波动呈现集群性的特点。即大幅度波动集中在某些时段上,而小幅度波动集中在另一些时段上,这导致了股票定价的有效性与传统理论有所差异,同时使股票所承受的风险状态也有所改变。在分形理论的框架下,二阶以上的高阶矩是不存在或者说是无穷大的,这时,以方差为风险计量的主流金融计量理论就面临着合理性的置疑。

风险计量是股票投资中的核心问题之一,传统的均值—方差方法和 β 系数度量风险的方法只有在收益的概率分布是正态分布的条件下才有意义。对于正态分布而言,只要期望收益率水平和方差确定了,投资者面临的风险状况也就确定了。但收益率呈非规则性分布,单由期望收益率和方差确定投资者面临的风险就存在问题。具体来说,即使收益率的期望值和方差都固定,也可能有无数种收益率分布状况与之对应。在不同的收益率分布下,风险状况显然是不尽相同的。此外,学者们指出,方差计量风险,对损失和盈利平等处理,有违投资者对风险的心理感受。

由于传统风险计量理论存在的种种不足,学术界重新又从能真实反映风险的本质属性的角度,建立一套相对更为合理的度量体系。于是,出现了只将股票的损失部分计入风险的风险计量方法,典型的是仅刻画相对于某一目标收益水平(通常取期望水平或零收益水平)之下的收益率分布状况的下方风险(Downside Risk)。该类方法的理论基础是对于一定的收益分布状况,投资者在组合投资时,通常只关心收益率出现在某一目标收益水平下的可能性的高低。在这一方面,下方风险方法克服了均值—方差方法的不足,得到了广泛的重视和研究。并以 Harlow 的 LPM(Lower Partial Moment)方法最为成熟。

1952 年,Markowitz 在"Portfolio Selection"一文中,用股票收益的方差度量投资收益的不确定性,即风险。厌恶风险的理性投资者在决策时,追求的是收益和风险的最佳平衡,也就是一定风险下获得最大收益或一定收益下承受最小的风险。在该模型中,组合收益就是组合中各证券期望收益的加权平均,组合模型的关键问题在于风险的度量。

Markowitz 的资产配置模型以方差作为风险的度量,方差方法的合理性决定了资产配置的有效性。如果以方差度量风险,其优点在于,方差具有良好

的数学特性，组合的方差可以分解为组合中单个资产收益的方差和各个资产收益之间的协方差，从而很容易确定。即：

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_i\omega_j\ \mathrm{cov}(r_i, r_j) \tag{1}$$

其中，σ_p^2 为组合的方差，$\mathrm{cov}(r_i, r_j)$ 为证券间的协方差，ω 为加权系数。通过优化算法，可以确定对应某一收益水平的惟一最优解。

对于分形分布来说，写成上述组合形式存在困难。首先，因为分形分布中，高阶矩不存在，因此不能应用方差描述风险。分形分布中也有表示收益离散程度的参数 λ，Fama、Roll 以及 Samuelson[3] 曾经使用该参数描述风险，构造投资组合，文献[4]中 Peters 评述了他们的工作，文献[5]也进行了类似的研究工作，在这些工作中，最根本的问题还是关于证券组合风险如何表达的问题。在他们的工作中，假定所有证券具有同样的表示尖峰和厚尾的分布参数 α，这样才能写出组合风险用个股风险和加权系数表达的形式。这些假设对于他们的工作是必须的，因为具有同样 α 的股票组合后，新的组合也具有同样的特征参数 α。然而，这也是不现实的，因为实证研究显示，不同的股票确实表现出不同的 Hurst 指数和 α。遗憾的是，具有不同厚尾效应的股票组合的多元极值分布理论，到目前为止，仍然是未解决的问题。可见，现实股票收益分布的多样性和复杂程度，决定了股票组合投资问题的复杂性。同时，用参数 λ 表示风险，仍然存在同方差计量风险类似的问题，即对损失和盈利平等处理，有违投资者对风险的心理感受。本文将讨论在分形分布下的投资组合问题，在下方风险思想和收益率的分形分布的基础上，构造一种不同参数 α 股票组合的不相关资产的组合策略，并进行相应的实例分析。

四、基于下方风险思想和分形分布的一种投资组合模型

1. LPM 方法与本文的风险计量。下方风险计量方法中，具有代表性的理论体系是低位矩 LPM 方法，意为只有收益分布的左尾部分才被用作风险衡量的计算因子。对于离散情形，LPM 的风险可表示为：$LPM_n = \sum_{R_p=-\infty}^{T} P_p(T-R_p)^n$ 。其中，P_P 是组合收益率为 R_P 时的概率，T 为某一目标收益率（通常取总体平均水平或零收益水平），n=0，1，2，n 由效用函数的类型决定。n 取值不同，反映了 LPM 的不同含义，LPM_0 为低于目标收益率的概率，LPM_1 为单边离差的均值，LPM_2 类似于方差，是偏差平方的概率加权，因为它是关于目标计算的偏差，也称为目标半方差。

LPM 方法对风险计量的假设条件非常简单，仅要求投资者为风险厌恶型，但该方法的求解却十分繁琐。由于资产组合的概率分布一般很难确定，尤其是在收益的非规则分布的情况下；而且组合风险与各证券风险的关系也不

明确,从而组合风险的计算很难实现,由此对应的证券组合模型也就难以应用。LPM 方法在求解时,是通过组合中各资产的加权系数和价格构造试验分布的方法计算风险,进而求出优化模型的近似最优解,LPM 方法计算的复杂性,也限制了其在实际中应用中的推广。

在这里,由于我们用分形分布来描述证券收益的分布,因此,在分形分布下的组合问题,就不需要进行 LPM 方法中试验分布的模拟。但证券组合存在同样的问题,就是组合风险与各证券风险的关系难以明确表达,尤其是在各种证券具有不同特征指数 α 的情况,这时,甚至没有组合风险的惟一表达形式。事实上,股票间的相关性并不大,而且在实际进行组合选股时,人们常选择不同行业的股票来构造组合,这样的股票组合中,各股票间的相关程度很小,可以近似认为是不相关资产。基于这种考虑,本文采用 LPM 的思想,定义股票的风险,在分形分布下,构造不相关资产的组合模型。

定义单个证券的风险为证券收益率相对于某一目标收益率的 p 阶平均损失。假设证券收益率服从对称分形分布,资产连续可分,则单个证券的风险写成连续函数的形式,用 F 来表示:

$$F_i = \int_{-\infty}^{T} (T - x_i)^p f(x_i) dx_i \tag{2}$$

其中,T 为目标收益率,这里取为总体平均水平,p 为阶数,$0<p<a(1<a\leqslant 2)$,f(x)为收益率的密度函数,在这里假定收益率服从对称分形分布。

2. 构造组合模型。模型假设:(1)投资者是风险回避的;(2)证券无限可分;(3)无税收、无交易费用等摩擦;(4)不允许卖空;(5)证券收益服从对称分形分布。

模型构造前需要解决下面几个问题:

第一,收益 R 服从对称分形分布,那么,加权后收益变量的分布如何。

如果 $R\sim\psi(\alpha,0,\lambda,\delta)$,则 $\omega R\sim\psi(\alpha,0,|\omega|\lambda,\omega\delta)$,$0<|\omega|\leqslant 1$,这里,最重要的是 R 与 ωR 具有相同的特征指数 α。在 R/S 分析中,有关系 $R/S=(\alpha N)^H$,R 是样本的累积离差的极差,S 是标准差。Hurst 指数 H 取决于 R/S 的值,并和分形分布的指数 α 有如下关系 $H=1/\alpha$。当对变量 ωR 做 R/S 分析时,由于 R 和 S 同时变化 ω 倍,因此 R 对 S 的比值不变,即 H 和 α 的值都不变。对有相同指数 α 的分形分布具有可加性,根据分形分布的稳定性原理,组合分布的各参数与各组成部分的参数,有如下关系成立:

$$\begin{aligned}\lambda &= [(|\omega_1|\lambda_1)^\alpha + \cdots\cdots + (|\omega_n|\lambda_n)^\alpha]^{1/\alpha} \\ \delta &= \omega_1\delta_1 + \cdots\cdots + \omega_n\delta_n\end{aligned} \tag{3}$$

根据(3)式,当 ω_1 不为 0,$\omega_2,\cdots\cdots,\omega_n$ 为 0 时,就得到 $\omega R\sim\psi(\alpha,0,|\omega|\lambda,\omega\delta)$的分布关系。

第二,收益 R 服从对称分形分布,$R\sim\psi(\alpha,0,\lambda,\delta)$,对应的风险为 F_R,那么,加权后收益变量 ωR 的风险如何表达。

取目标水平 T 为总体平均水平,由于收益 R 服从对称分布,则:

$$F_{R_i}=\int_{-\infty}^{E(R_i)}(E(R_i)-R_i)^p f(R_i)dR_i=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|E(R_i)-r_i|^p f(R_i)dr_i$$

$$=\frac{1}{2}E(|E(R_i)-R_i|^p)$$

对于分形分布的 p 阶矩,与表示离散程度的参数 λ,有如下的关系,其中 H 是只与 α、β、p 有关的函数:$(E|E(R_i)-R_i|^p)^{1/p}=H(\alpha,\beta,p)\cdot\lambda$。在此基础上,可容易得到 F_R 和 $F_{\omega R}$ 的关系:

$$F_{R_i}=\frac{1}{2}[E|E(R_i)-R_i|^p]=\frac{1}{2}H^p(\alpha,\beta,p)\lambda^p \tag{4}$$

$$F_{\omega R_i}=\frac{1}{2}[E|E(\omega R_i)-\omega R_i|^p]=\frac{1}{2}H^p(\alpha,\beta,p)(|\omega|\lambda)^p$$

$$=\frac{1}{2}H^p(\alpha,\beta,p)|\omega|^p\lambda^p$$

因为 r 和 ωr 具有相同的参数 α、β,所以 H 函数值相同,这时有:$F_{\omega R_i}=|\omega|^p F_{R_i}$。

第三,由于假设组合中各股票是互不相关的,因此,组合的风险等于各股票风险的加总,即:$F_{组合}=\sum_{i=1}^{n}F_{\omega_i R_i}=\sum_{i=1}^{n}|\omega_i|^p F_{R_i}$。

第四,构造组合模型。有如下等式:

$$\min F_{组合}=|\omega_1|^p F_{R_1}+|\omega_2|^p F_{R_2}+\cdots+|\omega_n|^p F_{R_n}$$

$$(0<p<\alpha_{min},\alpha_{min}=\min(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n))$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\omega_t\geqslant 0\\ E(R_{组合})=\sum_{i=1}^{n}\omega_i E(R_i)=R_0\\ \sum_{i=1}^{n}\omega_i=1\end{cases} \tag{5}$$

3. 模型的特点。模型的估计量减少,Markowitz 模型需要(n+1)(n+2)/2 个参数估计量,该模型只需 2n 个,但在估计风险时计算较复杂;当 p=1 时,该模型是线性规划,求解方便;避免了证券组合风险计量的困难,其不足之处是还不能给出任意证券组合风险的精确表达。在股票具有不同 α 指数时,组合风险与单个证券的风险关系至今还是一个未解决的问题,有待于进一步的研究。

五、实例分析

1. 样本选择。我们从沪市和深市分别选取 5 只不同行业的 A 股股票,共 10 只股票来进行分析,时间选为 1999 年 7 月至 2000 年 6 月的日数据。这样只从不同行业随机选取股票,更接近实际的组合方式,更有代表性。

2. 实证结果及分析。我们使用模型(5)中当 p=1 时的情形进行分析。之所以选这种情况,是因为它用整数阶矩表示风险,同时,Markowitz 模型计

算的标准差也是一阶的，便于进行比较，此外，它是线性规划模型，求解方便。

我们利用最小二乘回归各股票的分形分布参数，计算本文定义的风险(2)，各股票的风险和收益等统计数据由表1给出。然后，利用Matlab软件，求解线性规划和二次规划，分别得到用实际计算的数据点描述的有效边界，图1是本文定义的规划模型在“收益(纵轴)—风险(横轴)”坐标系下的有效边界；图2是在“风险—收益”坐标系下，同时给出了Markowitz模型用标准差表示的相关资产和不相关资产的有效边界。一般来说，组合的有效边界应该指风险和收益正向相关的边界，即图1中曲线拐点的上面部分，和图2曲线拐点的右半部分，这里说的有效边界泛指整条曲线。4条曲线所代表的分别是以标准差表示的相关资产(σ—相关)和不相关资产(σ—不相关)的有效边界，“F—不相关”代表本文定义的组合模型的有效边界，“F—相关”代表是在利用本文的组合模型计算得到的各最优点的组合权重下，股票组合的实际风险。在分形分布意义下，具有不同特征指数α的各股票之间的相关关系是不确定的，但我们可以进行的推论是，相关资产的最优风险点，一定在“F—相关”曲线的下方或这条曲线上，但不会高于该曲线。因为如果最优点位于该曲线上方，那就不是最优的，总可以找到同等收益下具有更小风险的点。

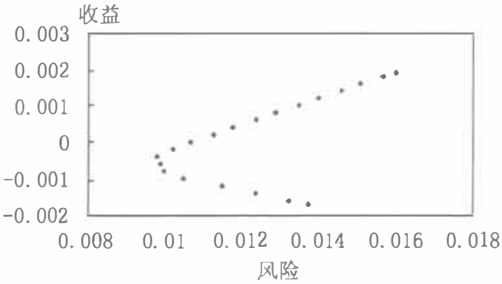

图1　分形分布下方风险的有效边界

表1　组合个股的统计数据

代码	600651	600690	600663	600692	600643	000501	000013	000563	000514	000023
$\mu(10^{-4})$	19.43	-5.108	-8.996	-3.558	-8.292	10.80	6.557	-3.270	-17.51	13.74
$\sigma^2(10^{-4})$	11.16	11.20	9.761	6.227	8.098	11.59	12.45	8.914	11.32	13.79
$F_i(10^{-2})$	1.609	1.351	1.006	0.9728	1.115	1.400	1.410	1.214	1.405	1.609

从图2可以看出，本文定义的风险，组合的有效边界位于Markowitz标准差风险(σ—相关)的下方(在收益—风险坐标系下位于Markowitz组合有效边界的左上方)，意味着同等收益下，该方法承担较小的风险，同等风险下会有较大的收益，也就是说较方差计量风险对于配置资源有较高的效率。同时，如果考察到资产之间的相关性，相关资产的最优风险应该位于曲线“F—相关”的下方，表明即使考虑资产间的相关性，分形分布的下方风险较正态分布的方差计量风险仍有较高的效率。

从图2还可以看到，以方差(标准差)来构造投资组合，这里的资产的相关性，可用相关系数来表示，它对组合风险优化的影响比较大，在图上表现为σ—相关和σ—不相关曲线相差较大，并且随着期望收益的变化，组合的风险也发生了较大的波动。而用分形分布定义的下方风险，在同等收益幅度下则波动

较小。这表明以分形分布计量风险,组合风险的变化没有方差计量风险变化得那么剧烈,同时资产之间的相关性对于分形分布下的风险计量,没有相关系数对组合方差的影响那么大。虽然目前我们还不能精确描述这种具有不同α指数的资产间的相关性,但从实证结果看,与不相关资产组合的风险相差并不大。同时,这种资产配置模型具有应用方便的特点,值得做进一步的应用研究。

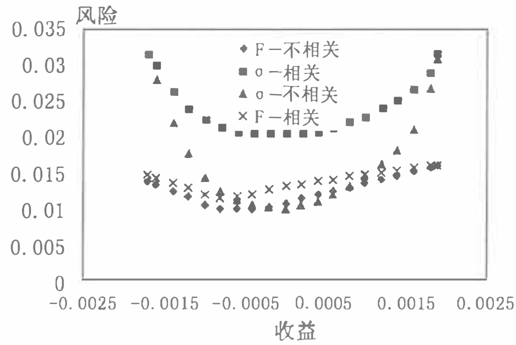

图2　不同风险计量方法的比较

参考文献:

[1]S. A. Dostoglou, S. T. Rachev. Stable distribution and the term structure of interest rates [M]. Mathematical and Computer Modeling 29, 1999, P. 57—60.

[2]Hurst, H. E.. The long-term storage capacity of reservoirs [J]. Transactions of the American Society of Civil Engineers 116, 1951, P. 770—808.

[3]P. A. Samuelson. Efficient portfolio selection for pareto-levy investment [J]. The Journal of Financial and Quantitative Analysis Vol. 2, Issue 2, 1967, P. 107—122.

[4] Peters E. E.. Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics [M]. New York, NY: John & Sons, Inc, 1994.

[5]S. L. Ortobelli, S. T. Rachev. Safety-first analysis and stable paretian approach to portfolio choice theory [J]. Mathematical and Computer Modelling 34, 2001, P. 1037—1072.

A Portfolio Selection Model within the Framework of Fractal Distribution of Capital Returns

ZHENG Wei[1], WANG Jian-hua[2]

(1. *Post-doctor Station*, *Changjiang Securities*, *Wuhan* 430015, *China*
2. *International Economics Management School*, *Lanzhou University of Science and Technology*, *LanZhou* 730050, *China*)

Abstract: In this paper, a portfolio model of irrelevant capital asset is built under the framework of downside risk and fractal distribution model, and subsequently, a corresponding empirical example is submitted.

Key words: returns; fractal distribution; portfolio selection