

●陈和本

生产要素最优配置的定量方法

在建立社会主义市场经济的过程中，政府如何对社会经济活动进行宏观调控，以达到生产要素的最优配置，是我们需要积极探索解决的一个十分重要的问题。

社会经济活动是一个有机的整体。国民经济的各部门之间，各部门的主要产品之间，都是相互联系、相互制约的。只有当它们的发展规模或产量符合社会经济活动的客观需求比例时，才能使经济活动协调地、健康地向前发展。

本文从一些基本假设出发，应用数学模式和计算机解题程序，推导出两种生产要素分配给 n 个相互关联的生产部门时的最优配置公式，即当一定量的两种生产要素按公式分配给 n 个相互关联的生产部门时，能使各部门的产量在符合客观经济活动的需求比例的条件达到最大。

(一)

我们首先讨论将两种生产要素分配给三个生产部门的最优配置问题。

假设：1. 有两种生产要素，第一种生产要素的总量为 L ，第二种生产要素的总量为 K 。

2. 有三个相互关联的生产部门（或三种产品）它们的生产函数分别为：

$$Q_1 = A_1 L_1^{\alpha_1} K_1^{1-\alpha_1} \quad (1)$$

$$Q_2 = A_2 L_2^{\alpha_2} K_2^{1-\alpha_2} \quad (2)$$

$$Q_3 = A_3 L_3^{\alpha_3} K_3^{1-\alpha_3} \quad (3)$$

其中 A_1 、 A_2 、 A_3 ； α_1 、 α_2 、 α_3 都是常数，可由生产活动的统计数据求得，它们反映了各生产部门的技术状况。 L_i 、 K_i ($i=1, 2, 3$) 表示两种生产要素分配给第 i 个生产部门的数量，且满足：

$$L_1 + L_2 + L_3 = L \quad (4)$$

$$K_1 + K_2 + K_3 = K \quad (5)$$

3. 客观经济活动对三种产品的需求比例为

$$Q_1 : Q_2 : Q_3 = 1 : \beta_2 : \beta_3$$

即 $Q_2 = \beta_2 Q_1 \quad (6)$

$$Q_3 = \beta_3 Q_1 \quad (7)$$

其中 β_2 、 β_3 可由投入产出表定出。

问题：两种生产要素如何分配，才能使三种产品的总量既能符合客观经济活动的需求比例，又能使 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 为最大。

分析：由于 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 之间存在一定的比例关系，所以，当 Q_1 为最大时， Q_2 、 Q_3 也为最大了。因此，问题就化为在约束条件下；

$$\begin{aligned} Q_2 &= \beta_2 Q_1 \\ Q_3 &= \beta_3 Q_1 \\ L_1 + L_2 + L_3 &= L \\ K_1 + K_2 + K_3 &= K \end{aligned}$$

求出使第一部门的产量

$$Q_1 = A_1 L_1^{\alpha_1} K_1^{1-\alpha_1}$$

为最大的生产要素分配方法。

这是一个多元函数的条件极值问题。我们可应用拉格朗日乘法来求解此问题。

如此求得的 K_1 、 K_2 、 K_3 和 L_1 、 L_2 、 L_3 就是符合需求比例的生产要素的最优分配方案。

(二)

如果要把一定量的两种生产要素 L 和 K 分配给 n 个相关联的生产部门，且设第 i 个生产部门的生产函数为

$$Q_i = A_i L_i^{\alpha_i} K_i^{1-\alpha_i} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

各部门之间的需求比例为

$$Q_1 : Q_i = 1 : \beta_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

其中

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n L_i &= L, & \sum_{i=1}^n K_i &= K \end{aligned}$$

那末，类似于第一部分的推导方法，我们可以求得符合两个生产要素的总量限制和 n 个部门之间的需求比例的生产要素的最优配置方案。其解题步骤是：

1. 先求 u^* 。 u^* 是下方程的解：

$$\sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{A_i} \left(\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} u^{\alpha_i} \left[1 - \frac{K}{L} \left(\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i} \right)^{-1} u^{-1} \right] = 0 \quad (8)$$

其中 $\beta_1 = 1$ 。

2. 把 u^* 代入下方程，求得 K_1 ：

$$K_1 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{A_i} \left(\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} \cdot u^{\alpha_i} = K \cdot \frac{1}{A_1} \left(\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1} \right)^{\alpha_1} \cdot u^{\alpha_1} \quad (9)$$

3. 把求得的 u^* 、 K_1 代入下式，求得 K_i ：

$$K_i = \frac{\beta_i A_1}{A_i} \left(\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} \left(\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1} \right)^{-\alpha_1} u^{\alpha_i - \alpha_1} \cdot K_1 \quad (10)$$

($i=2, \dots, n$)

4. 把求得的 u^* 、 K_i 代入下列各式，求得 L_i ：

$$L_i = \left(\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i} u \right)^{-1} K_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

从上述解题步骤，我们可以看出：关键是要设法求出(8)式的解 u^* 。为此，我们可以编制牛顿迭代法的解题程序，利用计算机来求出(8)式的解 u^* 。下面，我们举一个简单的例子，来说明本方法的实际应用。

〔例〕设某国家有劳动力 $L = 1$ 亿人，有耕地 $K = 10$ 亿亩。现在要把这两种生产要素分配于粮食和棉花两种产品的生产上。已知棉花和粮食的生产函数分别为：

$$Q_1 = 100L_1^{\frac{1}{2}}K_1^{\frac{1}{3}}$$

$$Q_2 = 1000L_2^{\frac{1}{3}}K_2^{\frac{2}{3}}$$

其中 Q_1 、 L_1 、 K_1 和 Q_2 、 L_2 、 K_2 分别表示棉花和粮食的产量，以及分配给用于生产棉花和粮食的劳力、耕地数量。

此外，关于社会对粮、棉的需求比例已知为：

$$Q_2 = 25.3Q_1$$

试求符合需求比例的劳力、耕地的最优配置方案。

〔解〕已知： $A_1 = 100$ ， $A_2 = 1000$ ， $\alpha_1 = 1/2$ ， $\alpha_2 = 1/3$ ，

$$\beta_2 = 25.3$$
， $L = 1$ ， $K = 10$ ， $n = 2$

1. 利用(8)式求 u^* 。

把已知数值代入(8)式，化简得：

$$10u^{\frac{1}{2}}(u-20) + 2.53(2u)^{\frac{1}{3}}(u-5) = 0$$

从上式可见，方程的解 u^* 位于5与10之间。

应用牛顿迭代法求解。设

$$f(u) = 10u^{\frac{1}{2}}(u-10) + 2.53(2u)^{\frac{1}{3}}(u-5)$$

于是， $f'(u) = 10(\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} - 5u^{-\frac{1}{2}}) + 2.53 \times 2^{\frac{1}{3}}(\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}} - \frac{5}{3}u^{-\frac{2}{3}})$

牛顿迭代法的计算机解题程序如下：

```

10. DEF FNA(u) = 10 * u ↑ 1/2 * (u - 10)
20. DEF FNB(u) = 2.53 * (2 * u) ↑ 1/3 * (u - 5)
30. DEF FNC(u) = FNA(u) + FNB(u)
40. DEF FND(u) = 10 * [(3 * u ↑ 1/2) / 2 - 5 / (u ↑ 1/2)]
50. DEF FNE(2.53 * 2 ↑ 1/3 [(4 * u ↑ 1/3) / 3 - 5 / (3 * u ↑ 2/3)])
60. DEF FNF(u) = FND(u) + FNE(u)
65. INPUT u_0 = 5
70. LET u_1 = u_0 - FNC(u_0) / FNF(u_0)
75. IF ABS[(U_1 - U_0) / u_1] <= 0.00001 THEN GOTO 90
80. LET U_0 = U_1
85. GOTO 70
90. PRINT "u_1 = ", u_1
95. END
RUN

```

应用计算机解题程序，求得 $u^* = 6.5$

2. 代入(9)式求得 K_1 ：

$$K_1 = 100u^{\frac{1}{2}} / [10u^{\frac{1}{2}} + 2.53(2u)^{\frac{1}{3}}] = 3$$

3. 由(10)式，求 K_2 ：

$$K_2 = 2.53(4u)^{\frac{1}{3}}K_1 = 7$$

4. 由(11)式，求 L_1 、 L_2 ：

$$L_1 = u^{-1} K_1 = \frac{6}{13}$$

$$L_2 = (2u)^{-1} K_2 = \frac{7}{13}$$

于是，我们求得的劳力和耕地的最优配置方案是：在总量为1亿劳力和10亿亩耕地的两种生产要素中，当分配给棉花生产的劳力为6/13亿劳力，耕地为3亿亩；分配给粮食生产的劳力为7/13亿劳力，耗地为7亿亩时，生产的棉花和粮食的产量在符合社会需求比例 $Q_2 : Q_1 = 25.3$ 的条件下达到最大，且为：

$$Q_1 = 100 \times \left(\frac{6}{13}\right)^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 117.67 \text{ (亿斤)}$$

$$Q_2 = 1000 \times \left(\frac{7}{13}\right)^{\frac{1}{2}} \times 7^{\frac{1}{2}} = 2977 \text{ (亿斤)}$$

(三)

在本文中，我们对各部门的生产函数都假定为

$$Q = AL^\alpha K^{1-\alpha} \quad (0 < \alpha < 1)$$

此种类型的生产函数，在西方经济理论中称为Douglas函数，常常用于宏观经济分析。从数学角度来看，它是一种线性齐次函数，即满足

$$Q(\lambda L, \lambda K) = \lambda Q(L, K)$$

此种生产函数的一个重要特性是：当生产要素按比例增加时，引起部门产品的产量按同比例增加。如果L表示投入的劳动数，K表示投入的资金数，且将生产函数改写成

$$\frac{Q}{L} = A \left(\frac{K}{L}\right)^{1-\alpha}$$

它表示单位劳动的产量不但与单位劳动占有的资金数K/L有关，与系数A成正比，而且与指数 $1 - \alpha$ 亦有关。指数 $1 - \alpha$ 称为单位劳动的产量对于单位劳动的资金占有量的弹性系数，它表示当K/L增加1%时，Q/L增加 $(1 - \alpha)\%$ 。因此，A和 $(1 - \alpha)$ 的数值的大小反映了生产部门的生产技术状况。A和 $(1 - \alpha)$ 越大，生产技术状况越好。一般说来，用Douglas生产函数来描述某些生产部门的生产情况是可行的。

本文的实例取自《经济学动态》1980年第4期刊登的文章《资料最优利用与社会主义经济中的几个重要问题》。本文所讨论的问题，是对该例的一个推广。

本文建立的数学模型以及推导得出的解题方法和计算机求解程序，为二种生产要素按一定的需求比例分配到n个生产部门的最优配置问题，提供了宏观分析的定量方法。

· 书讯 ·

石人瑾、林宝怀主编的《外商投资企业会计》问世

我校会计学系石人瑾、林宝怀两位教授主编的《外商投资企业会计》一书，最近已由立信会计出版社正式出版。该书分为概论、外汇记帐方法、投入资本的核算、流动资产的核算、长期投资和拨付所属资金的核算、固定资产和无形资产的核算、流动负债的核算、长期负债的核算、成本和费用的核算、销售和利润的核算、自营出口销售的核算、会计报表及其分析、合并会计报表、解散和清算的核算、目标成本的确定和总预算的编制、内部控制和内部审计等17章，计40余万字。本书是作者在原著《中外合资经营企业会计》一书的基础上，根据新的会计制度，以及有关外商投资企业方面的新法规，作了重大修改，增加了许多新内容，使全书“更上了一层楼”。

(尚才)

照国际性城市的标准来发展和改造自己，那与构造以上海为中心的都市圈并行不悖。

产业接轨。“诸侯经济”的征象之一是重复建设，结构趋同，过度竞争。在市场驱动下，区域经济的发展要走既有分工、又有合作的新路。国际化大都市及其都市圈，同样有这个要求。这里，为大都市服务和发展自己，是相辅相成的。苏南与上海有长期合作的经历，今后可能出现的趋势是：一方面，某些传统行业和老产品会从核心转移到外围；另一方面，某些高新技术行业和新产品则会相对集中，双方都要有所取、有所舍。在这个意义上，甘当配角、甘拜下风并不是落后，那是为了共同的先进。至于为大都市继续供应农副产品和建筑材料等商品、物资，更有利于彼此的一起发展。

基础设施接轨。国际化大都市应有现代化的基础设施，不仅在国内，还延伸到都市圈和更深远的腹地，否则不能发挥其吸引力和辐射力。完成这个任务，也要靠同心协力。特别是苏南和南通，沿江沿海，有好的港口，将成为上海的转运基地或发电基地，不能看作是“为他人作嫁衣裳”。搞好这些基础设施，同时也在完善自己的生产建设环境。

改革开放接轨。经济发展靠改革开放。上海要成为国际化大都市，改革开放必须超前，并与国际惯例相衔接进而基本上按国际惯例办事。这对都市圈来说，也不能降低要求，否则就会出现体制差异，影响协调运行。这涉及到很多领域，除企业转换经营机制外，在培养市场上，以金融市场为主导，带动生产资料、劳动力、技术、信息、土地等市场，都要逐步发展，与上海相联，形成统一市场，统一机制。开放的具体政策现在还有一定落差，今后必须统一到关贸总协定的基本原则上来，彻底消除任何“大战”。

为上海构造都市圈，既是上海发展的需要，也是江苏首先是苏南发展的需要。这个地区不联成一片，将影响本地区成为全国经济最发达、综合实力最强的地区。

（上接第6页）同时并举”的思想已改为先实现社会主义农业集体化、再实现农业机械化和国家的工业化的思想。毛泽东这一思想的变化，不仅在实践中产生一些政策偏差，而且给他本人关于社会主义经济建设思想的发展造成困难。如党的“八大”以后，毛泽东把过渡时期又改变为从资本主义到共产主义整个历史阶段；把社会主义阶段的主要矛盾认为是无产阶级与资产阶级的矛盾；脱离生产力实际水平不断地调整生产关系，等等。毛泽东后来所推行的路线、政策不能不说与上述思想的转变有一定的逻辑关系。

①《马克思恩格斯选集》第4卷，第312页。

②《列宁选集》第1卷，第634页。

③《列宁选集》第4卷，第619页。

④《中共党史参考资料》上，第40页。

●⑥《邓小平文选（1975—1982）》，人民出版社1983年版，第372、266页。

⑦⑧参见《毛泽东选集》第5卷，人民出版社1977年版，第81—82、218页。

⑨《毛泽东选集》第2卷，第650页。

· 书讯 ·

颜光华主编《实用经济控制论》出版

我校工业经济系颜光华教授和严学丰教授主编的《实用经济控制论》一书，最近由立信会计出版社正式出版。本书科学地运用控制论的原理和方法，来分析经济活动的调节和控制过程，既阐述宏观控制的基本理论和方法，又着重从微观方面研究了企业经济活动控制的原理，是理论与实践密切结合的一份新成果。

（朱）

$$L_1 = u^{-1} K_1 = \frac{6}{13}$$

$$L_2 = (2u)^{-1} K_2 = \frac{7}{13}$$

于是，我们求得的劳力和耕地的最优配置方案是：在总量为1亿劳力和10亿亩耕地的两种生产要素中，当分配给棉花生产的劳力为6/13亿劳力，耕地为3亿亩；分配给粮食生产的劳力为7/13亿劳力，耗地为7亿亩时，生产的棉花和粮食的产量在符合社会需求比例 $Q_2 : Q_1 = 25.3$ 的条件下达到最大，且为：

$$Q_1 = 100 \times \left(\frac{6}{13}\right)^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 117.67 \text{ (亿斤)}$$

$$Q_2 = 1000 \times \left(\frac{7}{13}\right)^{\frac{1}{3}} \times 7^{\frac{2}{3}} = 2977 \text{ (亿斤)}$$

(三)

在本文中，我们对各部门的生产函数都假定为

$$Q = AL^\alpha K^{1-\alpha} \quad (0 < \alpha < 1)$$

此种类型的生产函数，在西方经济理论中称为Douglas函数，常常用于宏观经济分析。从数学角度来看，它是一种线性齐次函数，即满足

$$Q(\lambda L, \lambda K) = \lambda Q(L, K)$$

此种生产函数的一个重要特性是：当生产要素按比例增加时，引起部门产品的产量按同比例增加。如果L表示投入的劳动数，K表示投入的资金数，且将生产函数改写成

$$\frac{Q}{L} = A \left(\frac{K}{L}\right)^{1-\alpha}$$

它表示单位劳动的产量不但与单位劳动占有的资金数K/L有关，与系数A成正比，而且与指数 $1 - \alpha$ 亦有关。指数 $1 - \alpha$ 称为单位劳动的产量对于单位劳动的资金占有量的弹性系数，它表示当K/L增加1%时，Q/L增加 $(1 - \alpha)\%$ 。因此，A和 $(1 - \alpha)$ 的数值的大小反映了生产部门的生产技术状况。A和 $(1 - \alpha)$ 越大，生产技术状况越好。一般说来，用Douglas生产函数来描述某些生产部门的生产情况是可行的。

本文的实例取自《经济学动态》1980年第4期刊登的文章《资料最优利用与社会主义经济中的几个重要问题》。本文所讨论的问题，是对该例的一个推广。

本文建立的数学模型以及推导得出的解题方法和计算机求解程序，为二种生产要素按一定的需求比例分配到n个生产部门的最优配置问题，提供了宏观分析的定量方法。

· 书讯 ·

石人瑾、林宝怀主编的《外商投资企业会计》问世

我校会计学系石人瑾、林宝怀两位教授主编的《外商投资企业会计》一书，最近已由立信会计出版社正式出版。该书分为概论、外汇记帐方法、投入资本的核算、流动资产的核算、长期投资和拨付所属资金的核算、固定资产和无形资产的核算、流动负债的核算、长期负债的核算、成本和费用的核算、销售和利润的核算、自营出口销售的核算、会计报表及其分析、合并会计报表、解散和清算的核算、目标成本的确定和总预算的编制、内部控制和内部审计等17章，计40余万字。本书是作者在原著《中外合资经营企业会计》一书的基础上，根据新的会计制度，以及有关外商投资企业方面的新法规，作了重大修改，增加了许多新内容，使全书“更上了一层楼”。

(尚才)