□ 周 望

鞍点逼近在经济统计中的应用

在各种产品的生产过程中，我们常常需要检验产品的质量。我们不可能一件一件地检验，而只能抽取一部分样品，对其性能进行考核。由于存在着随机性，我们所得的结果与实际结果往往存在一定的误差。尽管抽取的样本数量越多，那么最终所得的结果也就越精确。但是样本数量一旦增多，就需要消耗大量的人力、物力、财力，那也就失去了产品检验的意义。产品的检验所依据的大样本理论，越来越难以适应现代生产的需要。

近几年，国外已开始重视小样本理论的研究。小样本理论并非指只抽取十个甚至更少数量的样本，就能得到比较精确的结果，而是指在大样本的基础上，样本数量能够适当减少，但仍必须保持一定的样本规模。这一理论的主要作用在于能够大大提高检验的精度。小样本理论一旦应用于生产，能为整个国民经济带来巨大的效益。该理论主要有两大内容，自助法与鞍点逼近，它们各自相互独立，但又相辅相成。由于篇幅关系，本文只介绍鞍点逼近在经济统计中的应用。

鞍点这一概念来源于复变函数。在 1954 年，Daniels 首先把这一概念引入到统计推断中，成功地给出了 n 个独立同分布随机变量的均值分布估计。这一结果的意义在于它大大提高了估计的精度，但当时这一思想并未引起统计学界太多的重视。直到 1979 年，随着 Barndorff－Nielsen 及 Cox 合作论文的出现，鞍点逼近的重要性才逐渐地在统计推断的各个方面体现出来。下面，首先简单地介绍一下这一理论。

假定 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个独立的随机变量，它们都服从于同一分布 F，我们的目的是要估计 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ 的分布密度或者分布函数，以此来求得样本均值的置信区间，并进行假设检验。

如果我们把随机变量 X 的半不变量母函数记为 $k(\lambda)$，也即 $k(\lambda)=\log Exp(\lambda x)$，其中 E 是对 X 求数学期望，$\lambda$ 是任一实数，那么使用 Fourier 变换公式，$\overline{X}$ 在 y 处的密度是：

$$g(y)=\frac{n}{2\pi 1}\int_c \exp[n(k)\lambda)-\lambda y)]d\lambda \qquad (1)$$

其中，i 为虚数单位，c 是 $k(\lambda)$ 收敛区域内的一条围道。鞍点逼近能够通过一些正规算法，象最陡下降算法而得到。因此，通过复杂的计算我们可得出如下结果：

$$g(y)\sim g_s(y)=\left|\frac{n}{2\pi k''(\lambda_y)}\right|^{\frac{1}{2}}\exp[n\{k(\lambda y)-\lambda_y y\}] \qquad (2)$$

其中，λy 由鞍点方程 $k'(\lambda)=y$ 决定，它也就是通常所谓的鞍点；k' 与 k'' 分别表示 k 的一阶、二阶导数。

我们之所以要求得(2)式，是因为它有三方面的重要性：第一，(2)式的误差是 n^{-1}，而不是

中心极限定理正态逼近所获得的$n^{-\frac{1}{2}}$的误差。第二，误差是一致的，也即对任何y，误差的数量级均为n^{-1}。第三，对于尾部概率的计算(2)式显得尤为精确，甚至对于很小的n，比如n=10，它也能给出非常好的结果，(尾部概率主要指$P(x>t)$及$P(x<t)$类型的概率，其中t的数值比较大。)

象通常所谓的Edgeworth展开一样，(2)式也有修正项，如果写出第一项修正项，我们就有公式：

$$g(y)\sim g_s(y)\left(1+\frac{1}{n}\left[\frac{1}{8}\frac{k^{(4)}(\lambda_y)}{\{k''(\lambda_y)\}^2}-\frac{5}{24}\frac{\{k^{(3)}(\lambda_y)\}^2}{\{k''(\lambda_y)\}^3}\right]\right) \tag{3}$$

其中，$k^{(j)}$表示k的j阶导数$(j\geqslant 3)$。(3)的相对误差是n^{-2}。

为了求出$\bar{X}$的置信区间，我们必须求出$\bar{X}$的分布函数，它可以通过类似的方法而获得。如果母体是连续性的分布，我们就有结果：

$$F(y)\sim F_s(y)=\Phi(y)+\varnothing(\omega_y)(\omega_y^{-1}-\delta_y^{-1}) \tag{4}$$

其中 $y=[2n\{\lambda_y-y-k(\lambda_y)\}]^{\frac{1}{2}}\mathrm{sgn}(\lambda_y)$

$$\delta_y=\lambda_y\{nk''(\lambda_y)\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\varnothing(\omega_y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\omega_y^2}{2}\right),\ \Phi(y)=\int_{-\infty}^{y}\varnothing(t)lt$$

$$\mathrm{sgn}(\lambda_y)=\begin{cases}1 & 如果 \quad \lambda_y>0\\ 0 & 如果 \quad \lambda_y=0\\ -1 & 如果 \quad \lambda_y<0\end{cases}$$

如果$y=Ex$，那么，$\lambda_y=0$，(4)式将改为：

$$G(Ex)\sim\frac{1}{2}+\frac{1}{6}(2\pi n)^{-\frac{1}{2}}k^{(3)}(o)/\{k''(o)\}^{\frac{3}{2}} \tag{5}$$

(4)式与(5)式的误差均小到$n^{-\frac{3}{2}}$。应指出的是，我们实际应用的是(4)式与(5)式，而(3)式一般只具有理论意义，当然，通过积分也能由(3)式得到(4)式与(5)式，但在具体计算时，存在着不少困难。

以上只是获得鞍点逼近的一种方法，我们还可以通过另一种途径来求得(3)式，为此，我们引进共轭指数族的概念：任一分布$f_x(x)$的共轭指数族为密度函数是$f_x(x,\lambda)=\exp\{\lambda x-k(\lambda)\}f_x(x)$的一族分布。我们现在把$\bar{X}$的分布密度$g(y)$嵌入它的共轭指数族通过计算得到：$g_{\bar{x}}(y,\lambda)=\exp\{n(\lambda_y-k(\lambda))\}g(y)$ (6)

在(6)式的两边同时乘以$\exp\{-n(\lambda_y-k(\lambda))\}$后，得：

$$g(y)=g_{\bar{x}}(y,\lambda)\exp\{n(\lambda_y-k(\lambda))\}$$

然后对$g_{\bar{x}}(y,\lambda)$进行Edgeworth展开，便得(3)式。

无论(3)式，还是(4)式或(5)式，它们所涉及的计算量都是非常大的，对于鞍点方程$k'(\lambda)=y$，手工根本无法求解。令人感到欣慰的是，计算机的飞速发展，为我们解决这些问题提供了强有力的工具。

由于在实际中，母体分布F未知，我们只能用经验分布$\hat{F}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I(X_i\leqslant x)$来代替F，其中$x_1、x_2、\cdots,x_n$为n个独立样本，$I(X_i\leqslant x)=\begin{cases}1 & 如果\ X_i\leqslant x\\ 0 & 如果\ X_i>x\end{cases}$。从而我们就能选择适当的统计量T

$=t(x_1,\cdots,x_n)$来估计母体 F 的特征值 θ，例如，我们常用 $T=\bar{X}$ 去估计数学期望 EX。因而，如果我们有 $T=t(\bar{X})$，$\theta=t(F)$，那么概率 $G(y)=P\{t(\tilde{F})-t(F)\leqslant y\mid x\sim F\}$将可由

$$\tilde{G}(y)=P\{t(\tilde{F}^*)-t(\tilde{F})\leqslant y\mid x\sim F\}\text{来估计}, \tag{7}$$

这儿 $\tilde{F}^*$ 是通过自助法而获得的经验分布，我们一般是通过数值模拟来逼近(7)式，这相当麻烦。幸运的是，在相当广的范围内，我们能够使用鞍点逼近即(4)式或(5)式来代替(7)式，而且误差非常小。

下面我们举两个例子来说明这一结果。

例 1，考虑 $T=\bar{X}$。从(4)式或(5)式可以知道，应用鞍点逼近，我们唯一需要知道的是半不变量母函数 $k(\lambda)$。现在，我们将把 $k(\lambda)$记为 $\tilde{k}(\lambda)$，因为我们是基于 $\tilde{F}$ 而得到 $k(\lambda)$的，通过简单的计算我们有：

$$\tilde{F}(\lambda)=\log\{n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\exp(\lambda x_j)\},$$

通过对 $\tilde{K}(\lambda)$求导，鞍点 λ_y 可由方程 $y=\sum_{i=1}^{n}X_j\exp(\lambda X_j)/\sum_{j=1}^{n}\exp(\lambda X_j)$决定。如果 $y\leqslant\min(X_j)$或 $y>\max(X_j)$，那么上述方程将无解，我们将不考虑这一特殊情形。

表 1　$\bar{X}$-EX 的百分位点逼近

概率	实际	鞍点逼近	正态逼近	Fishir－Comish 一项	Fishir－Comish 二项
0.0001	-6.34	-6.31	-8.46	-6.61	-6.51
0.0005	-5.79	-5.78	-7.48	-6.01	-6.00
0.001	-5.55	-5.52	-7.03	-5.80	-5.74
0.005	-4.81	-4.81	-5.86	-5.05	-5.01
0.01	-4.42	-4.43	-5.29	-4.66	-4.63
0.05	-3.34	-3.33	-3.74	-3.50	-3.48
0.10	-2.69	-2.69	2.91	-2.82	-2.81
0.20	-1.86	-1.86	-1.91	-1.96	-1.95
0.80	1.80	1.80	1.91	1.87	1.87
0.90	2.87	2.85	2.91	3.01	3.00
0.95	3.73	3.75	3.74	3.99	3.97
0.99	5.47	5.48	5.29	5.92	5.89
0.995	6.12	6.12	5.86	6.67	6.63
0.999	7.52	7.46	7.03	8.26	8.19
0.9995	8.19	7.99	7.48	8.89	8.82
0.9999	9.33	9.12	8.46	10.30	10.20

假如给定 10 个随机样本，对于 $\bar{X}$－EX 分布的百分位点，表 1 给出了一个数值说明。表 1 中的“实际”一栏，是在计算机上通过 50000 次抽样而获得，我们可以认为它就是实际值。同时给出的还有正态逼近及一项与二项 Fisher－Cornish 逼近。从中，我们可以看出鞍点逼近尤为

精确。

例 1 是由已知的概率来求百分位点，当然我们也可以反过来求概率。

例 2，假定 $X_i=1(U_iV_i)$，$i=1,2,\cdots,n$，是 n 个独立的样本，具有相同的二元分布，$\theta=E(V)/EU$ 是为我们所感兴趣的参数。我们一般用 $T=\bar{V}/\bar{U}$ 来估计 θ。我们将使用下面表 2 所提供的 25 个样本来计算。

表 2

u：	155	68	28	25	190	82	92	196	164	68	82	36	195
v：	1546	508	280	410	1450	517	738	2225	1660	505	680	145	224
u：	92	185	61	62	71	207	185	475	155	29	96	699	
v：	733	1957	287	473	473	1260	1958	4375	1499	245	828	6361	

对 $P(\bar{V}/\bar{U}\leqslant t)$，下面的表 3 比较了鞍点逼近，自助逼近（来自 10000 个样本），使用非参数方差估计 $\sum(V_j-tu_j)^2/n\bar{u}$ 的正态逼近以及一项 Edgeworth 展开]

表 3　基于 25 个样本计算的 $P(\bar{V}/\bar{u}=t)$

t	实际概率	鞍点逼近	正态逼近	一项 Edgeworth 展开
7.8	0.0016	0.0013	0.0001	0.0002
8.0	0.0056	0.0046	0.0007	0.0017
8.2	0.0149	0.0146	0.0055	0.0088
8.4	0.0408	0.0428	0.0279	0.0346
8.6	0.1080	0.1121	0.0999	0.1043
8.8	0.2480	0.2540	0.2575	0.2502
9.0	0.4698	0.4729	0.4921	0.4764
9.2	0.7181	0.7179	0.7295	0.7213
9.4	0.8920	0.8893	0.8929	0.8969
9.6	0.9705	0.9682	0.9695	0.9763
9.8	0.9922	0.9932	0.9939	0.9975
10.0	0.9988	0.9989	0.9991	1.0002
10.2	0.9999	0.9999	0.9999	1.0001

其中实际概率是通过 10000 个自助样本而计算得到。

不难发现以上的论述均是关于均值的推导，并且讨论了随机变量是独立同分布。另一类非常有用的统计量是：极大似然估计值，我们的结果基本是令人满意的，但极大似然估计值与 $\bar{X}$ 之间有着非常密切的联系。出现这种情况是由于鞍点理论只是发展到了如此的地步，但这并不是指该理论不能适用于其它统计量，对于二阶 U 统计量，我们同样有（3）式，只不过各个变量的含义将有所改变。对于更为复杂的一些统计量，诸如 V_{on}—Mises 统计量，由于它们的一些特殊结构，也有一些零星的结果。

虽然鞍点逼近这一理论尚处于发展之中，有许多结果有待于人们的证明，不过它的发展前途一片光明，在不远的将来一定能在经济分析的各个领域得到充分的应用。