基于效用最大化的投资组合旋转算法研究

张 鹏[1],张忠桢[2],岳超源[1]

(1. 华中科技大学 系统工程研究所,湖北 武汉,430074;
2. 武汉理工大学 管理学院,湖北 武汉 430070)

摘 要:文章综合考虑投资组合的期望收益率和风险(方差),提出了基于效用最大化的投资组合模型,并用线性不等式组的旋转算法进行求解。计算结果表明,在允许卖空的情况下,风险偏好系数能够在整个变化范围内较好地反映投资者的期望收益率,而在不允许卖空情况下,风险偏好系数只能在某个区间起作用。因此,投资者应结合自己的风险偏好和投资组合的期望收益率作出决策。文章运用自编程序能够很快地计算出各种不同的风险偏好系数所对应的有效投资组合,以帮助投资者得到最优投资策略。所运用的线性不等式组的一种旋转算法避免了通常处理二次规划问题所需的松弛变量、剩余变量和人工变量,操作简便、计算效率高。

关键词:投资组合;效用;旋转算法

中图分类号:F224.9;O221.2 **文献标识码**:A **文章编号**:1001-9952(2005)12-0116-10

一、引 言

个人和机构投资者经常面临的问题是如何分配自己的财富从而使其效用最大,投资组合理论就是用来解决这类问题的。美国经济学家 Harry Markowitz 提出了均值—方差投资组合模型,并用均值—方差的二次式逼近投资者的效用函数(Markowitz,1952、1991)。Dexter. A. S. 等证明了以均值—方差二次逼近为基础的最优决策与以真正的期望效用值为基础得到的最优决策一致(Dexter 和 Ziemba,1980)。Pully. L. M 在分析对数效用函数后得出了相同的结论(Pulley,1981、1983)。Baron. D. P. 和 Steinbach. M. C. 分别提出了具有风险偏好系数的均值—方差二次期望效用函数最大化的投资组合模型,并分析了在允许卖空情况下的投资组合有效边界的特征(Baron,1977;Steinbach,2001)。Jose Twagilimana 在 Baron 和 Steinbach 的基础上证明了

收稿日期:2005-08-30

作者简介:张 鹏(1975—),男,江西吉安人,华中科技大学系统工程研究所博士;
张忠桢(1946—),男,湖北武汉人,武汉理工大学管理学院教授,博士生导师;
岳超源(1944—),男,湖北武汉人,华中科技大学系统工程研究所教授,博士生导师。

在允许卖空情况下投资组合的有效边界为一条抛物线,且投资组合期望收益率为风险偏好系数的线性函数(Joseph Twagilimana,2002)。但是,他们没有讨论不允许卖空的情况。一般而言,允许卖空会加大投资者和金融市场的风险,不发达市场是不允许卖空的。笔者认为,针对目前中国不发达的证券市场,研究不允许卖空情况下的投资组合更具有现实意义。

国内一些学者,如李仲飞和汪寿阳运用交互式方法研究了在不允许卖空情况下均值—方差期望效用函数最大化的投资组合模型(李仲飞、汪寿阳,2001),唐小我等研究了类似投资组合的有效边界的结构特征(唐小我、马永开等,2003)。

本文拟在上述研究的基础上提出不允许卖空情况下的均值—方差二次期望效用函数最大化的投资组合模型,并运用张忠桢提出的线性不等式组的旋转算法进行求解(张忠桢、张鹏,2003)。最后,文章以一个具体的算例,运用计算机编程,求解 5 种资产在不同风险偏好系数条件下的有效投资组合。

二、不允许卖空情况下效用最大化的投资组合模型

为了讨论问题的方便,我们在文中不考虑交易成本和税收,并假设资产无限可分。设有 n 种资产可供选择,第 i 种资产的收益率为 R_i(随机变量),其期望值为 $r_i=E(R_i)$,记 $R=(R_1,R_2,\cdots\cdots,R_n)^T$,$r=(r_1,r_2,\cdots\cdots,r_n)^T$;协方差矩阵为 $G=(\sigma_{ij})_{n\times n}$,$\sigma_{ij}=COV(R_i,R_j)$, $i,j=1,2,\cdots\cdots,n$;第 i 种资产的投资比例为 x_i,$i=1, 2,\cdots\cdots, n$,记 $x=(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)^T$, $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=1$ 为资本预算约束;e 表示分量全为 1 的 n 维列向量,则有 $e^Tx=1$。在允许卖空情况下 x_i 可以小于 0($i=1,2,\cdots\cdots,n$),在不允许卖空情况下 x_i 必须大于或等于 0。投资组合的收益率为 $R_p=R^Tx$,其均值和方差分别为 $r_p=r^Tx$ 和 $\sigma_p^2=x^TGx$,其中 $r_p\geqslant\min\{r_1,r_2,\cdots\cdots,r_n\}$。以均值-方差评价风险资产实际上是假定投资者的期望效用可以表示为 r_p 和 σ_p^2 的函数,即 $E[U(R^Tx)]=f(r_p,\sigma_p^2)$,式中 U(·)为效用函数。

本文将以 Jose Twagilimana 提出的效用函数为基础构建不允许卖空情况下的投资组合模型。Jose 提出投资者的效用函数综合考虑了投资者的期望收益率和风险(方差)偏好,其表达式为 $U(R^Tx)=\theta R^Tx-(R^Tx)^2/2$,其中,$\theta$ 为投资者的风险偏好系数,是一个预先假定的值。效用函数的期望值为 $U(r_p)=E[U(R^Tx)]=\theta E[R^Tx]-E[(R^Tx)^2]/2=\theta r^Tx-[x^TGx+(r^Tx)^2]/2$。理性投资者的期望效用函数为投资组合期望收益率的增函数,则有 $\frac{\partial E(U(R^Tx))}{\partial(r^Tx)}=\theta-r^Tx\geqslant0$,即 $\theta\geqslant r^Tx$。不同风险态度的投资者具有不同 θ 值,全部 θ 值对应的有效投资组合构成了有效边界。因此,在允许卖空情况下有效边界可由以下模型确定:

$$\mathrm{Max}\{\theta r^Tx-[x^TGx+(r^Tx)^2]/2\}$$

$$\text{s.t}\quad e^{T}x=1$$

或写成：

$$\text{Min}\{[x^{T}Gx+(r^{T}x)^{2}]/2-\theta r^{T}x\}$$

$$\text{s.t}\quad e^{T}x=1 \tag{1}$$

Jose用拉格朗日方法和Sherman-morrison-woodbury方程得到，$x=G^{-1}(kr+\lambda e)$，$r_p=r^{T}x=r^{T}G^{-1}(kr+\lambda e)=(\beta+\theta\delta)/(\alpha+\delta)$，$\sigma_p^2=x^{T}Gx=(\alpha r_p^2-2\beta r_p+\eta)/\delta$。其中：$\alpha=e^{T}G^{-1}e$，$\beta=e^{T}G^{-1}r$，$\eta=r^{T}G^{-1}r$，$\delta=\alpha\eta-\beta^2$，$\lambda=(1+\eta-\theta\beta)/(\alpha+\delta)$，$k=(\theta-\lambda\beta)/(1+\eta)$ 。

然而在投资过程中，允许卖空会加大投资者和金融市场的风险。因此，一般情况下，不发达市场(如中国证券市场)是不允许卖空的，我们很有必要研究不允许卖空情况下的效用最大化的投资组合的最优投资策略。为了得到不允许卖空情况下的投资组合有效前沿，我们认为，需要求解以下模型：

$$\text{Max}\{\theta r^{T}x-[x^{T}Gx+(r^{T}x)^{2}]/2\}$$

$$\text{s.t}\begin{cases}e^{T}x=1\\x\geqslant 0\end{cases} \tag{2}$$

或写成：

$$\text{Min}\{[x^{T}Gx+(r^{T}x)^{2}]/2-\theta r^{T}x\}$$

$$\text{s.t}\begin{cases}e^{T}x=1\\x\geqslant 0\end{cases} \tag{3}$$

三、旋转算法的要点及计算步骤

为了解题方便，本文假设G为正定或半正定矩阵。模型(3)为凸二次规划问题，可以运用线性不等式组的旋转算法进行计算(张忠桢、张鹏，2002，2003)。根据库恩—塔克条件，模型(3)的最优解满足：

$$\begin{cases}\sigma_{i1}x_1+\sigma_{i2}x_2+\cdots\cdots+\sigma_{in}x_n+(r_1x_1+r_2x_2+\cdots\cdots+r_nx_n)r_i-\theta r_i+\mu_1\geqslant 0,i=1,2,\cdots\cdots,n\\x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=1\\x_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots\cdots,n\\[\sigma_{i1}x_1+\sigma_{i2}x_2+\cdots\cdots+\sigma_{in}x_n+(r_1x_1+r_2x_2+\cdots\cdots+r_nx_n)r_i-\theta r_i+\mu_1]x_i=0,i=1,2,\cdots\cdots,n\end{cases} \tag{4}$$

式中μ_1对应于模型(3)的拉格朗日乘子。

为了叙述方便，将不等式组(4)中的$\sigma_{i1}x_1+\cdots\cdots+\sigma_{in}x_n+(r_1x_1+\cdots\cdots+r_nx_n)r_i-\theta r_i+\mu_1\geqslant 0$和$x_i\geqslant 0$两个不等式称为互补不等式，它们的系数向量称为互补向量。在(4)中引入人工变量不等式$\mu_1\geqslant -M$(M是充分大的正数)，$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=1$和$\mu_1\geqslant -M$也称为互补不等式，它们的系数向量称为互补向量。

不等式组(4)有n+1变量，其中θ为风险偏好系数。第i个不等式的系

数向量为 $g_i=(\sigma_{i1}+r_ir_1,\cdots\cdots,\sigma_{in}+r_ir_n,1)(i=1,2,\cdots\cdots,n)$，等式约束的系数向量为 $g_{n+1}=(1,\cdots\cdots,1,0)$。$x_i\geqslant0$ 和 $\mu_1\geqslant-M$ 的系数向量为 $e_i(i=1,2,\cdots\cdots,n+1)$，$e_i$ 为 $n+1$ 阶单位矩阵的第 i 行。根据基本解的定义，如果每一对互补松弛向量 g_i 和 e_i 中恰有一个是基向量，那么所有互补松弛条件将得以满足。由于人工变量不等式 $\mu_1\geqslant-M$ 在开始两次旋转运算就会出基，所以 M 可以为任意数，为了计算方便，我们在计算过程中取 $M=0$。

不等式组(4)的旋转算法的计算步骤如下：

步骤 1：确立初始表。以 $x_1\geqslant0,\cdots\cdots,x_n\geqslant0,\mu_1\geqslant0$ 为初始基本不等式，$e_1,e_2,\cdots\cdots,e_{n+1}$ 为初始基向量，$y^{(0)}=(0,\cdots\cdots,0,0)^T$ 为初始基本解。非基向量 g_i 的偏差 $\sigma_i=g_iy^{(0)}-\theta r_i=-\theta r_i(i=1,2,\cdots\cdots,n)$，$\sigma_{n+1}=g_{n+1}y^{(0)}-1=-1$，各非基向量关于基向量的组合系数及其偏差如表 1 所示。

表 1　初始表

	e_1	…	e_n	e_{n+1}	σ_i
g_1	$\sigma_{11}+r_1r_1$	…	$\sigma_{1n}+r_1r_n$	1	$-\theta r_1$
…	…	…	…	…	…
g_n	$\sigma_{n1}+r_nr_1$	…	$\sigma_{nn}+r_nr_n$	1	$-\theta r_n$
g_{n+1}	1	…	1	0	-1

步骤 2：预处理。进行两次旋转运算，g_1 入基 e_{n+1} 出基，g_{n+1} 入基 e_1 出基，然后删掉入基向量 g_{n+1} 所在列和出基向量 e_{n+1} 所在行。

步骤 3：主要迭代（按最小偏差规则）

(1)若所有非基向量的偏差为非负数，停止计算，则 $X_i^*=X_i^0+\sigma_i$（X_i^0 为初始基可行解）。否则转为(2)。

(2)以偏差最小的非基向量入基，如果该行没有正元素，原问题无可行解，停止计算。如果该行在主对角线上的元素为正，以其为枢轴进行一次旋转运算，转(1)；否则，以该行最大正元素及其对称元素为枢轴进行两次旋转运算转(1)。

从算法的步骤 2 和步骤 3 可以看出，我们总是用非基等式或非基不等式与基不等式进行交换，非基等式一旦成为基等式就不再让其出基。这是因为，如果一个不等式组有解，其每一个解必须满足所有等式。为了使基等式不再出基，只需不在基等式所在的列寻找枢轴元素。因此非基等式的系数向量一旦成为基向量，其所在的列就可以删除；同时其互补向量所在行也可以删除掉。

初始基本解 $y^{(0)}$ 的前 n 个分量为 0 意味着各资产的比例等于零。在步骤 2 中，经过两次旋转运算，基向量 e_1 转变为非基向量。此时，资产组合引入了第一种资产，其比例即为非基向量 e_1 的偏差 σ_1。

在主迭代过程中，当基向量 $e_i(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ 转变为非基向量时，其所对应的偏差 σ_i 为第 i 种资产的投资比例。根据文献[11]的结论可知，如果一次主旋转运算使得资产组合的资产减少，则风险增加；反之，如果资产增加，则风险减少。但这时的资产组合可能包含负资产，相当于卖空。

四、算　例

例:某投资者持有 A、B、C、D 和 E 5 种资产,这 5 种资产的期望收益率分别为 40%、60%、80%、90%和 50%,协方差矩阵为:

$$G=\begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 & 0.5 & 0.6 & 0.6 \\ 0.3 & 0.5 & 0.9 & 0.7 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 & 0.7 & 1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.6 & 0.4 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

投资者的期望效用函数为 $U(r_p)=\theta r^T x-[x^T Gx+(r^T x)^2]/2$,在允许卖空和不允许卖空情况下,投资者的风险偏好系数(θ)分别为 0.6、0.8、1、1.2、1.8、2、3、4、5 和 6 时,应该如何投资,使投资者的期望效用函数最大化?

解:在允许卖空情况下,G 的逆矩阵

$$G^{-1}=\begin{bmatrix} 0.8936 & -6.8085 & 0.3404 & -0.3830 & 7.7447 \\ -6.8085 & 4.2553 & -0.2128 & 1.4894 & -2.3404 \\ 0.3404 & -0.2128 & 2.5106 & -1.5745 & -0.3830 \\ -0.3830 & 1.4894 & -1.5745 & 3.0213 & -3.3191 \\ 7.7447 & -2.3404 & -0.3830 & -3.3191 & 3.7872 \end{bmatrix}$$

$\alpha=e^T G^{-1} e=3.5744$,$\beta=e^T G^{-1} r=1.1446$,$\eta=r^T G^{-1} r=0.8868$,$\delta=\alpha\eta-\beta^2=1.8595$,当风险偏好系数 θ 为已知时,可以求出 $\lambda=(1+\eta-\theta\beta)/(\alpha+\delta)$,$k=(\theta-\lambda\beta)/(1+\eta)$,从而可以计算出最优投资策略 $x=G^{-1}(kr+\lambda e)$,期望收益率 $r_p=r^T x=r^T G^{-1}(kr+\lambda e)=(\beta+\theta\delta)/(\alpha+\delta)$,方差 $\sigma_p^2=x^T Gx=(\alpha r_p^2-2\beta r_p+\eta)/\delta$ 和投资者的效用函数 $U(r_p)=\theta r^T x-[x^T Gx+(r^T x)^2]/2$。在允许卖空情况下,当风险偏好系数 θ 分别为 0.6、0.8、1、1.2、1.8、2、3、4、5 和 6 时,计算可得模型的最优决策如表 2。

表 2　允许卖空情况下的不同风险偏好系数 θ 对应的最优结果

θ	最优解					r_p	σ_p^2	$U(r_p)$
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
0.6	0.4080	−0.8301	0.2255	−0.0697	1.2663	0.4160	0.2974	0.0144
0.8	0.3422	−0.7001	0.2505	0.0337	1.0737	0.4844	0.3316	0.1044
1	0.2764	−0.5701	0.2756	0.1371	0.8810	0.5528	0.3838	0.2081
1.2	0.2106	−0.4401	0.3006	0.2404	0.6884	0.6213	0.4540	0.3256
1.8	0.0133	−0.0514	0.3758	0.5505	0.1105	0.8266	0.7727	0.7599
2	−0.0525	0.0798	0.4009	0.6539	−0.0821	0.8951	0.9149	0.9321
3	−0.3814	0.7298	0.5261	1.1708	−1.0453	1.2373	1.8962	1.9982
4	−0.7103	1.3798	0.6514	1.6876	−2.0085	1.5795	3.3278	3.4066
5	−1.0392	2.0297	0.7766	2.2045	−2.9716	1.9217	5.2095	5.1572
6	−1.3681	2.6797	0.9019	2.7213	−3.9348	2.2639	7.5415	7.2499

从表 2 可知，在允许卖空情况下，随着风险偏好系数的增加，投资组合期望收益率也增加，其关系如图 1 所示。图 2 则显示投资组合的有效前沿为一条抛物线。由此我们可以得出投资者的最优决策。对于一个风险偏好系数为 0.6 的投资者来说，他对 A、C 和 E 3 种资产的最优购买比例应分别为 40.8%、22.55% 和 126.63%，而对 B 和 D 两种资产，则应分别卖空 83.01% 和 6.97%。对于一个风险偏好系数为 5 的投资者来说，他对 B、C 和 D 3 种资产的最优购买比例应分别为 202.97%、77.66% 和 220.45%，而对 A 和 E 两种资产，则应分别卖空 103.92% 和 297.16%。同样地，我们也可以得到其他风险偏好系数所对应的最优投资策略。

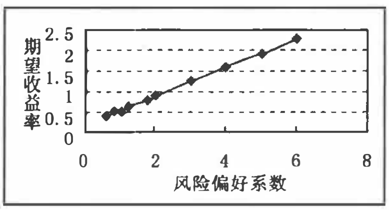

图 1　风险偏好系数与期望收益率的关系

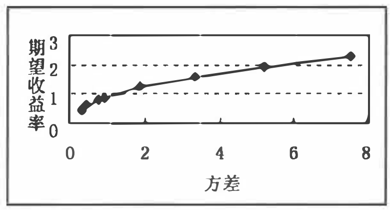

图 2　投资组合的有效前沿

在不允许卖空情况下，我们运用旋转算法求解投资组合的最优解。根据库恩—塔克条件，模型的最优解满足：

$$\begin{cases}
0.1x_1+0.2x_2+0.3x_3+0.4x_4+0.3x_5+(0.4x_1+0.6x_2+0.8x_3+0.9x_4+0.5x_5)\times0.4+\mu_1\geqslant0.4\theta \\
0.2x_1+0.7x_2+0.5x_3+0.6x_4+0.6x_5+(0.4x_1+0.6x_2+0.8x_3+0.9x_4+0.5x_5)\times0.6+\mu_1\geqslant0.6\theta \\
0.3x_1+0.5x_2+0.9x_3+0.7x_4+0.4x_5+(0.4x_1+0.6x_2+0.8x_3+0.9x_4+0.5x_5)\times0.8+\mu_1\geqslant0.8\theta \\
0.4x_1+0.6x_2+0.7x_3+x_4+0.5x_5+(0.4x_1+0.6x_2+0.8x_3+0.9x_4+0.5x_5)\times0.9+\mu_1\geqslant0.9\theta \\
0.3x_1+0.6x_2+0.4x_3+0.5x_4+0.5x_5+(0.4x_1+0.6x_2+0.8x_3+0.9x_4+0.5x_5)\times0.5+\mu_2\geqslant0.5\theta \\
x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\
x_1\geqslant0,x_2\geqslant0,x_3\geqslant0,x_4\geqslant0,x_5\geqslant0,\mu_1\geqslant0 \\
[0.1x_1+0.2x_2+0.3x_3+0.4x_4+0.3x_5+(0.4x_1+0.6x_2+0.8x_3+0.9x_4+0.5x_5)\times0.4-0.4\theta+\mu_1]x_1=0 \\
[0.2x_1+0.7x_2+0.5x_3+0.6x_4+0.6x_5+(0.4x_1+0.6x_2+0.8x_3+0.9x_4+0.5x_5)\times0.6-0.6\theta+\mu_1]x_2=0 \\
[0.3x_1+0.5x_2+0.9x_3+0.7x_4+0.4x_5+(0.4x_1+0.6x_2+0.8x_3+0.9x_4+0.5x_5)\times0.8-0.8\theta+\mu_1]x_3=0 \\
[0.4x_1+0.6x_2+0.7x_3+x_4+0.5x_5+(0.4x_1+0.6x_2+0.8x_3+0.9x_4+0.5x_5)\times0.9-0.9\theta+\mu_1]x_4=0 \\
[0.3x_1+0.6x_2+0.4x_3+0.5x_4+0.5x_5+(0.4x_1+0.6x_2+0.8x_3+0.9x_4+0.5x_5)\times0.5-0.5\theta+\mu_1]x_5=0
\end{cases}$$

以 $x_1\geqslant0,x_2\geqslant0,x_3\geqslant0,x_4\geqslant0,x_5\geqslant0,\mu_1\geqslant0$ 为初始基向量不等式，$e_1,e_2,\cdots\cdots,e_6$ 为初始基向量，$y^{(0)}=(0,\cdots\cdots,0,0)^T$ 为初始基解。建立初始表如表 3 所示：

表 3　例题的初始表

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	σ_i
g_1	0.26	0.44	0.62	0.76	0.5	1*	−0.4θ
g_2	0.44	1.06	0.98	1.14	0.9	1	−0.6θ
g_3	0.62	0.98	1.54	1.42	0.8	1	−0.8θ
g_4	0.76	1.14	1.42	1.81	0.95	1	−0.9θ
g_5	0.5	0.9	0.8	0.95	0.75	1	−0.5θ
g_6	1	1	1	1	1	0	−1

我们首先详细计算当风险偏好系数 $\theta=1.2$ 时的最优解。其具体步骤如下：

首先，人工变量不等式系数向量 e_6 出基，g_1 和 e_6 相交的元素为 1 大于 0，以 g_1 入基 e_6 出基。第一次旋转运算结果见表 4，其中 e_6 行已删除掉。

表 4　第 1 次旋转运算结果

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	g_1	σ_i
g_2	0.1800	0.6200	0.3600	0.3800	0.4000	1.0000	−0.2400
g_3	0.3600	0.5400	0.9200	0.6600	0.3000	1.0000	−0.4800
g_4	0.5000	0.7000	0.8000	1.0500	0.4500	1.0000	−0.6000
g_5	0.2400	0.4600	0.1800	0.1900	0.2500	1.0000	−0.1200
g_6	1.0000*	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	−1.0000

再让等式约束对应的系数向量 g_6 入基让 e_1 出基，进行第二次旋转运算，并删除 g_6 所在的列。以后的计算过程便是主要迭代。根据偏差最小规则，以 g_3 入基 e_3 出基进行第三次旋转运算，以 g_4 入基 e_4 出基进行第四次旋转运算，以 e_2 入基 g_2 出基进行第五次旋转运算，可得到最终表 5。

表 5　旋转运算结果的最终表

	g_2	g_3	g_4	e_5	g_1	σ_i—
e_2	2.8202	−0.5045	−0.7503	−0.6882	−1.5653	0.0336
e_3	−0.5045	2.6132	−1.2419	0.2057	−0.8668	0.1591
e_4	−0.7503	−1.2419	2.7684	0.2290	−0.7762	0.0828
g_5	0.6882	−0.2057	−0.2290	−0.1652	0.7464	0.1137
e_1	−1.5653	−0.8668	−0.7762	−0.7464	3.2083	0.7245

此时，所有偏差都是非负数，目标函数已经是最优解，最优解为 $x_1=0.7245$，$x_2=0.0336$，$x_3=0.1591$，$x_4=0.0828$，由于 e_5 是基向量，其对应的变量 $x_5=0$。可以算出此资产组合的期望收益率 $r_p=r^Tx=0.5118$，方差 $\sigma_p^2=x^TGx=0.2369$，期望效用 $U(r_p)=\theta r^Tx-[x^TGx+(r^Tx)^2]/2=0.4956$。由此可见，对于一个风险偏好系数为 1.2 的投资者来说，他对 A、B、C、D 和 E 5 种资产进行投资的最优投资比例应分别为 72.45%、3.36%、15.91%、8.28%和 0%。

在不允许卖空情况下，我们计算当风险偏好系数 θ 分别为 0.6、0.8、1、1.2、1.8、2、3、4、5 和 6 时，得出最优解如表 6。

表 6　不允许卖空情况下的不同风险偏好系数 θ 对应的最优结果

θ	最优解					r_p	σ_p^2	$U(r_p)$
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
0.6	1	0	0	0	0	0.4	0.1	0.11
0.8	1	0	0	0	0	0.4	0.1	0.19
1	0.9159	0.0187	0.0654	0	0	0.4299	0.1320	0.2715
1.2	0.7245	0.0336	0.1591	0.0828	0	0.5118	0.2369	0.3647
1.8	0.0957	0.0259	0.3532	0.5252	0	0.8091	0.7361	0.7609
2	0	0	0.3725	0.6275	0	0.8627	0.8459	0.9304
3	0	0	0.1765	0.8235	0	0.8824	0.9097	1.8029
4	0	0	0	1	0	0.9	1	2.6950
5	0	0	0	1	0	0.9	1	3.5950
6	0	0	0	1	0	0.9	1	4.4950

与允许卖空情况不同,在不允许卖空情况下,投资者的风险偏好系数与投资组合的期望收益率之间不是只存在一个线性函数关系,而是具有更加复杂的函数关系,如图 3 和图 4 所示。图 3 表明,当风险偏好系数不超过某个值时,投资组合的期望收益率为一个定值,不随风险偏好系数的变化而变化;随着风险偏好系数继续增加,投资组合的期望收益率也增加;但当风险偏好系数超过某个值时,投资组合的期望收益率不再变化。从表 6 可以看出,投资者的风险偏好系数与风险(方差)之间、风险偏好系数与期望效用之间也存在着类似复杂的函数关系(笔者将另文具体论述)。图 4 表明了不允许卖空情况下投资组合的有效前沿,与允许卖空情况不同,这里的有效前沿是一条分段抛物线(笔者将另文具体论述)。

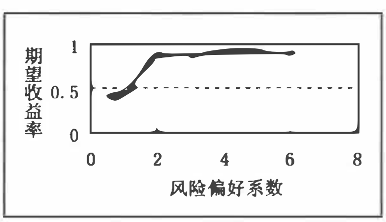

图 3　风险偏好系数与期望收益率的关系

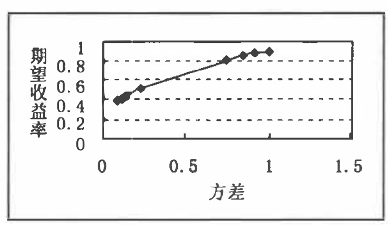

图 4　投资组合的有效前沿

从表 6 我们还可以得出理性的投资者的最优投资策略。一般而言,投资者不会选择风险大而收益率小的资产(如 x_5)。当风险偏好系数在开始比较小的范围内变化时,有效投资组合为一个固定的值,投资者的最优策略是将其全部资金投资于期望收益率较小且风险(方差)也小的资产(如 x_1)。但随着风险偏好系数的增加,投资者会逐渐减少这种资产的投资比例,而偏向于期望收益率较大的资产(如 x_4)。当风险偏好系数大于某个值时,投资者的最优策

略是将其全部资金投资于期望收益率最大的资产而不考虑风险的大小。

五、结　论

本文综合考虑了投资者的期望收益率和风险(方差),提出了基于效用最大化的投资组合模型,符合当前中国证券市场中投资者的实际情况,真实地反映了投资者的投资需求,具有较强的现实意义。文章运用的线性不等式组的一种旋转算法避免了通常处理二次规划问题所需的松弛变量、剩余变量和人工变量(钱颂迪,1990),因而操作更为简便,计算效率也更高。

本文的主要观点是,在允许卖空情况下,风险偏好系数能够在整个变化范围内较好地反映投资者的偏好,风险偏好系数越大,投资组合的期望收益率、风险(方差)和期望效用函数也越大。而在不允许卖空情况下,风险偏好系数只在某个区间能起作用。投资者在投资决策时不能简单地根据自己的风险偏好确定最优投资,还必须结合投资组合的预期收益率作出决策。笔者运用自编程序能够很快地计算出各种不同风险偏好系数所对应的有效投资组合,投资者可以根据其风险偏好从有效投资组合中选择最优投资策略。本文的研究具有较强的实用性和理论价值,有关结论有助于资产投资决策的理论研究和实际操作。

参考文献:

[1]Markowitz H. Portfolio selection[J]. The Journal of Finance,1952,7(1):77～91.

[2]Markowitz H. Portfolio selection: Efficient diversification of investments [M]. Second ed . in 1991, Basil Blackwall, New York, 1959.

[3]Dexter. A S, Yu, T N W, Ziemba W T. Portfolio selection in lognormal market when the investor has a power utility function: Computational results [M]. In M. A. H. , Dempster(ed), stochastic programming, Academic Press, New York and London, 1980.

[4]Pulley L M. A general mean-variance approximation to expected utility for short holding periods [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1981,16:361～373.

[5]Pulley L M. Mean-variance approximation to logarithmic utility [J]. Operations Research, 1983,31(4):685～696.

[6]Baron D P. On the utility theoretical foundations of mean-variance analysis [J]. The Journal of Finance, 1977,32:1683～1697.

[7]Steinbach M C. Markowitz revisited: Mean-variance models in financial portfolio analysis [J]. Siam Review, 2001,43:31～85.

[8]Joseph Twagilimana. Mean-variance model in portfolio analysis[M]. M. A thesis, University of Louisville, 2002.

[9]李仲飞,汪寿阳. 投资组合优化与无套利分析[M]. 北京:科学出版社,2001.

[10]唐小我,马永开. 现代组合预测和组合投资决策方法及应用[M]. 北京:科学出版社,

2003.
[11]张忠桢. 凸规划——投资组合与网络优化的旋转算法[M]. 武汉：武汉大学出版社，2004.
[12]张忠桢，张鹏. 马科维兹投资组合选择模型的旋转算法[J]. 武汉大学学报（理学版），2003，(1)：25～28.
[13]张忠桢，张鹏. 凸借款成本下均值方差投资组合问题的算法[J]. 武汉理工大学学报，2002，(8)：90～92.
[14]钱颂迪. 运筹学（修订版）[M]. 北京：清华大学出版社，1990.

The Pivoting Algorithm on the Portfolio Selection Model Maximizing the Utility

ZHANG Peng[1]，ZHANG Zhong-zhen[2]，YUE Chao-yuan[1]
(1. *Institute of System Engineering*，*Huazhong University of Science and Technology*，*Wuhan* 430074，*China*；
2. *School of Management*，*Wuhan University of Technology*，*Wuhan* 430070，*China*)

Abstract：In this paper，considering the expected rate of the return of the portfolio and risk (variance)，we propose a portfolio selection model maximizing the utility and solve it by the pivoting algorithm. The paper shows that risk preference coefficient with short sales can show the investor's preference within the whole region，but the coefficient without the short sales can just work within some regions. The investors should invest according to both their own preference and the expected rate of the return of the portfolio. We use program written by ourselves to calculate the effective portfolios with different risk preference coefficients，which could help investors to pinpoint the optimal portfolio. The algorithm solves the quadric programming problem without adding slack，remaining and artificial variables while its efficiency is very high and it operates very easily.

Key words：portfolio selection；utility；pivoting algorithm

（责任编辑　许　柏）